

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VII, HEFT 1

MIT 28 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 1. APRIL 1953)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1953

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band VII, Heft 1

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Prof. Dr. Ing. A. L. Nadai zum 70. Geburtstag. Von E. Melan.....	1
<i>Originalarbeiten</i>	
F. Vitovec, Die ausgeprägte Streckgrenze als Stabilitätsproblem. (Mit 5 Textabbildungen.)	4
J. Krettner, Elastostatische Grundformeln für allgemeine krummlinige Koordinaten	11
F. K. Müller, Einzelprüfung von Kupfertafeln auf ihre Eignung zur Herstellung von Fugenblechen. (Mit 2 Textabbildungen.)	21
K. Federhofer, Die Frequenzgleichung der Biegungsschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit einer Punktmasse und gleichförmiger Auflast. (Mit 1 Textabbildung.)	26
C. Torre, Beziehung zwischen den Charakteristiken und einer Berührungstransformation. (Mit 4 Textabbildungen.)	32
E. R. Berger, Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. (Mit 1 Textabbildung.)	39
A. G. Smekal, Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen. (Mit 14 Textabbildungen.)	49
<i>Buchbesprechungen</i>	70
El Badrawy, R. M., Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit (R. Bruniak). — Benz, F., Meßtechnik für Funkingenieure (E. Skudrzyk). — Czitary, E., Seilschwebbahnen (K. Peter). — Flügge, S. unter Mitarbeit von H. Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie. Erster Teil: Elementare Quantenmechanik. 2. Aufl. (W. Glaser). — Mott, N. F., Elements of Wave Mechanics (F. Kracmar).	

11278

Prof. Dr. Ing. A. L. Nadai zum 70. Geburtstag.

Am 3. April 1953 feiert Prof. Dr. Ing. A. L. Nadai seinen 70. Geburtstag. Sein Name ist jedem, der mit Elastizitäts- oder Plastizitätstheorie in Berührung gekommen ist, wohlbekannt, und wenn ihn auch seine kosmopolitische Einstellung nach Beendigung



A. Nadai

der Mittelschulstudien in seiner Heimatstadt Budapest bald ins Ausland führte, so zählen wir österreichischen Ingenieure ihn trotzdem als Sohn der alten österreichisch-ungarischen Monarchie mit Stolz zu einem der Unsrigen.

Nadai ist der vorbildliche forschende und wissenschaftlich arbeitende Ingenieur, der bei seinen theoretischen Untersuchungen stets die Forderungen der Praxis im Auge behält. Seine wissenschaftliche Ausbildung erhielt er an der Eidgenössischen Hochschule in Zürich, wo er seinen Lehrern Hirschfeld und Hurwitz einerseits seine theoretische, Prasil und Stodola die praktische Ausbildung als Ingenieur verdankt. Nach einer kurzen Tätigkeit in der Maschinenindustrie finden wir ihn an der ehemaligen Martensschen Anstalt an der Technischen Hochschule in Charlottenburg; hier war er unter Eugen Mayer und Max Rudeloff als Assistent tätig und dissertierte mit einer Arbeit über die Erwärmung von Stählen an der Fließgrenze. Sein künftiges Haupttätigkeitsgebiet, die Theorie der Platten und der Plastizität, beginnt sich in jener

Zeit schon abzuzeichnen. Die wissenschaftliche Tätigkeit Nadais wurde 1914 durch seine Einberufung zum Kriegsdienst im österreichisch-ungarischen Heer unterbrochen; nach Beendigung des ersten Weltkrieges ging er nach Göttingen, wo er am Institut für angewandte Mechanik unter L. Prandtl an verschiedenen Problemen der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie arbeitete. Hier habilitierte er sich 1923 und wurde 1926 zum Extraordinarius ernannt. Von den zahlreichen Veröffentlichungen, die Nadai in jener Zeit herausgab, seien hier nur zwei besonders erwähnt: Sein Buch über die elastischen Platten (1925) und „Der bildsame Zustand“ (1927), letztere meines Wissens die erste zusammenhängende Darstellung der Theorie der Plastizität.

1927 übersiedelte Nadai nach Pittsburg, seiner neuen Heimat, der er bis auf den heutigen Tag treu geblieben ist. Für seine wissenschaftliche Tätigkeit waren die USA erst der Boden, auf dem sie sich entsprechend entfalten konnte. In seiner Stellung als Mitarbeiter des Forschungslaboratoriums der Westinghouse Electric & Mfg.-Co. standen ihm die nahezu unbegrenzten Hilfsmittel für Theorie und Versuche dieses Unternehmens zur Verfügung, die ihm eine überaus große Zahl praktisch wichtiger Arbeiten ermöglichte, über die das nachfolgende Verzeichnis Aufschluß gibt. Daneben hielt er an amerikanischen Universitäten Vorlesungen über Elastizitäts- und Plastizitätstheorie; die angesehene Stellung Nadais im wissenschaftlichen Leben der USA kommt in seiner Fellowship und Mitgliedschaft mehrerer amerikanischer Gesellschaften zum Ausdruck.

Nadais konziliantes Wesen hat ihm die Freundschaft aller jener erworben, die mit ihm in Berührung kamen. Mit seinen Lehrern Hurwitz, Stodola und Prasil verband ihn ebenso eine dauernde Freundschaft, wie sie ihn auch heute noch an Prandtl und andere engere Fachkollegen knüpft. Und wenn ich noch einen charakteristischen Zug Nadais erwähnen darf, so ist dies seine Verehrung der Größen der Tonkunst. Der Schreiber dieser Zeilen erinnert sich noch, wie er vor Jahren bei einem kurzen Besuch Nadais mit ihm alle Stätten in und um Wien aufsuchte, die mit dem Namen Beethovens verknüpft waren.

Unser aller Wünsche gehen dahin, daß es Nadai nach bislang ebenso arbeits- wie erfolgreichen Jahren vergönnt sein möge, noch lange in unverminderter Schaffensfreude zur Vermehrung unserer wissenschaftlichen Erkenntnisse beizutragen.

Ernst Melan.

Verzeichnis der Arbeiten.

1. Untersuchungen der Festigkeitslehre mit Hilfe des Thermoelektrischen Temperaturmeßverfahrens. Dr.-Ing.-Dissertation 11. Jan. 1911, Technische Hochschule zu Berlin. Referent Dr. Eugen Meyer, Korref. E. Heyn. 55 S.
2. Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten. Forschungsarb. Ver. dtsh. Ing. 1915, 87 S. (auch Z. Ver. dtsh. Ing. 1914, 487).
3. Über das Ausbeulen von kreisförmigen Platten. Z. Ver. dtsh. Ing. 1915, 169—178.
4. Labile Gleichgewichtslagen stark gebogener Stäbe. Technische Blätter, Prag 1915, 137—145.
5. Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte. Schweiz. Bau-Ztg. 1920, 257 bis 260.
6. Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flußeisen. Z. angew. Math. Mechan. 1, 6—14 (1921).
7. Über die Biegung durchlaufender Platten. Z. angew. Math. Mechan. 2, 1—32 (1922).
8. Die Verbiegung in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. Physik. Z., 23. Jg., 366—376 (1922).
9. Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung. Z. angew. Math. Mechan. 2, 381—398 (1922).
10. Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab. Z. angew. Math. Mechan. 3, 442 bis 454 (1923).
11. Die Formänderungen und die Spannungen von durchlaufenden Platten. Bau-Ing. 5, 1—5 (1924).
12. Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen. Z. Physik 30, 106—138 (1924).

13. Der erste internationale Kongreß für angewandte Mechanik. Z. Ver. deutsch. Ing. **68**, 825 (1924).
14. Beobachtungen der Gleitflächenbildung an plastischen Stoffen. Proc. 1. intern. Congress for applied Mechanics, Delft, 1925.
15. Die Fließgrenze des Eisens. Schweiz. Bau-Ztg. **83**, Nr. 14, 15 (1924).
16. Über die unter einer Belastung sich bildenden Gleitflächen der festen Körper. Z. techn. Physik., **5**, 369—378 (1924).
17. Zur Mechanik der bildsamen Formänderungen. Werkstoffausschuß Ber. 56, 15 S. 5. März 1925. Düsseldorf.
18. Die elastischen Platten, 326 S. Berlin: Springer-Verlag. 1925.
19. Die Vorgänge nach der Überschreitung der Fließgrenze in verdrehten Eisenstäben. Z. Ver. deutsch. Ing. **1927**, 317.
20. Versuche über die Fließgrenze des Eisens. 2. intern. Kongreß für technische Mechanik, Zürich, 1926.
21. Der bildsame Zustand der Werkstoffe, 171 S. Berlin: Springer-Verlag. 1927.
22. Darstellung ebener Spannungszustände mit Hilfe von winkeltreuen Abbildungen. Z. Physik **41**, 48 (1927).
23. Plastizität und Erddruck. Kapitel 6, Band 6 des Handbuchs der Physik von Geiger und Scheel, 428—500 (1927).
24. Zur Theorie plastischer Zustände. Proc. 3. intern. Congress for applied Mechanics, Stockholm, 1930.
25. Mechanik der bildsamen Körper (von A. Nadai und E. Siebel). Hütte, des Ing. Taschenbuch, 1. Bd., 26. Aufl., 340—352. Berlin. 1931.

Selected papers.

26. On the mechanics of the plastic state of metals. A. S. M. E., 1929 annual meeting.
27. Plastic Torsion. A. S. M. E., 1930 meeting.
28. The phenomenon of slip in plastic materials, 36 pages. „Edgar Marburg Lecture“, June 24, 1931, Chicago, Ill. Proc. Amer. Soc. Test. Mater. **31** (1931).
29. Plasticity, A mechanics of the plastic state of matter, book, 350 pages, revised and enlarged from the german edition, Eng. Soc. Monographs Vol. 1., New York: McGraw Hill Book Company. 1931.
30. Theories of strength. J. appl. Mechan. **1**, Nr. 3, III—130 (1933).
31. The creep of metals. J. appl. Mechan. (Vol. 55 A. S. M. E. Trans., p. 61), Part I (1933).
32. The creep of metals, Part II (by E. A. Davis and A. Nadai, A. S. M. E. 1935, annual meeting).
33. Plastic behavior of metals in the strain-hardening range. J. appl. Physics **8**, 205—213 (March 1937).
34. On the creep of solids at elevated temperature. J. appl. Physics **8**, 418—432 (June 1937).
35. „Plastichnost“, Übersetzung der „Plasticity“ ins Russische von L. C. Levenzova, Moskau, 1936, 280 S.
36. Creep of metals, Intern. Congress for Testing of materials, London, April 19—24, 1937, group A Metals, p. 4.
37. Theoretical and experimental approach to the problem of collapse of deepwell casing (by J. L. Holmquist and A. Nadai), 1939 annual meeting of the Amer. Petroleum Institute, Chicago, Ill.
38. The forces required for rolling steel strip under tension. J. appl. Mechan. **6**, A 54—62 (1939).
39. High-speed tension tests at elevated temperatures (by M. J. Manjoine and A. Nadai). Part I, Proc. Amer. Soc. Test. Mater. **40**, 16 pages (1940); Parts II, III, J. appl. Mechan. A 77—91 (June 1941).
40. Hyperbolic Sine chart for estimating working stresses of alloys at elevated temperatures (by A. Nadai and P. G. McVetty). Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 1943 meeting.
41. The Creep of metals under various stress conditions, Theodor von Kármán Anniversary Volume, 1941, p. 237—257.
42. Theory of the expanding of boiler tube joints, Davenport Spring Meeting, 1943.
43. Plastic flow and creep. Sci. American **70**—72 (Febr. 1943).
44. Plastic states of stress in curved shells, 1943 A. S. M. E. annual meeting.
45. Trip to Moscow and Leningrad to attend 220th anniversary of russian academy of Sciences, in 1945. Rheology Bulletin **17**, Nr. 3, 9—10 (1946).
46. Eugene Cook Bingham (commemoration of his death). J. Colloid Sci. **2** (Febr. 1947).
47. The flow of metals under various stress conditions. James Clayton Lecture, Proc. Inst. mechan. Eng. London **157**, 121—160 (1947).
48. Theory of the plastic distortion of thick-walled cylinders. Hans Reissner Anniversary Volume, Edwards, Ann Arbor, Michigan, p. 430—448, 1949.

49. Theory of flow and fracture of solids, Vol. 1, 572 pages (2nd Edition of Plasticity). New York: McGraw Hill Book Comp. 1950.
50. Strainhardening and softening with-time in reference to creep and relaxation in metals. A. S. M. E. Trans. **74**, 403—413 (1952).
51. The influence of time upon creep. The hyperbolic sine creep law. Stephen Timoshenko Anniversary Volume 1938, p. 155—170.
52. Stress and strain in the outer solid shell of the earth. Trans. Amer. geophysic. Union **33**, Nr. 2, 247—276 (1952).
53. Über den Spannungszustand und die von ihm hervorgerufenen Verformungen der äußeren Kugelschale der Erde. Alfons Leon Gedenkschrift. Wien: 1951.

Die ausgeprägte Streckgrenze als Stabilitätsproblem.

Von F. Vitovec, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Röntgenspannungsmessungen haben ergeben, daß auch bei weichem Flußstahl die plastische Verformung in Teilbereichen der Oberfläche bereits bei Spannungen von der Größenordnung der Einkristallstreckgrenze einsetzt. Unter der Annahme einer bestimmten Verteilung der örtlichen Fließgrenzen wird die ausgeprägte Streckgrenze des Vielkristalls als Stabilitätsproblem behandelt und der Einfluß eines Spannungsgefälles untersucht.

Summary. Tension measurements by way of X-rays have yielded the result that even with mild steel the plastic deformation starts in portions of the surface already with stresses having the dimension of the single crystal yield point. Assuming a specified distribution of the local yield limits the pronounced yield point is treated as a stability problem, whereby the influence of the stress gradient is made the object of a special investigation.

Résumé. Des mesures de tension par rayons X (Roentgen) ont montré que même dans les aciers doux, la déformation plastique dans des parties de la région superficielle commence pour des tensions voisines des tensions propres de certains cristaux constituants. Supposant une répartition déterminée du yield point de chaque cristal, le yield point caractérisé des aciers, est traité comme un problème de stabilité. L'influence de la chute des tensions fait l'objet d'une étude spéciale.

Verschiedene Werkstoffe zeigen eine ausgeprägte obere Streckgrenze, nach deren Überschreiten die weitere Verformung bis zum Einsetzen der Verfestigung im allgemeinen bei kleineren Spannungen, der unteren Streckgrenze, stattfindet. Außer an weichem Stahl wurde diese Erscheinung an Messing¹, Manganbronze² sowie an Aluminium und verschiedenen Aluminiumlegierungen³ beobachtet.

Die ausgeprägte Streckgrenze gibt ein scharfes Kennzeichen für den Übergang der elastischen in die plastische Verformung des Werkstoffes, das bei allen anderen Metallen fehlt. Diese Grenzspannung ist von ausschlaggebender Bedeutung für die Berechnung der Konstruktionselemente. Es wurde daher die Erscheinung der ausgeprägten Streckgrenze in sehr zahlreichen Abhandlungen untersucht. Hierbei hat sich gezeigt, daß die Streckgrenze kein unveränderlicher Kennwert des Werkstoffes ist, sondern vom Zustand des Werkstoffes und den Prüfbedingungen wesentlich beeinflußt wird.

Vom metallkundlichen Standpunkt neigte man früher zur Ansicht, daß die ausgeprägte Streckgrenze auf eine Labilitätserscheinung zurückzuführen ist, welche durch den Zusammenbruch eines Netzwerkes höherer Festigkeit (z. B. Korngrenzen-

¹ W. Köster: Über das Verhalten von Messing an der Streckgrenze. Z. Metallkunde **19**, 304—310 (1927).

² C. Bach und R. Baumann: Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien, 2. Aufl., S. 137 und 140. Berlin: Springer-Verlag. 1921. — A. V. de Feres: Some Experiments on Plastic Elongation of Wire. Proc. Amer. Soc. Test. Mater. **16**, Teil II, 455 (1916).

³ C. F. Elam: Influence of Rate of Deformation on the Tensile Test. Proc. Roy. Soc. (London) **165**/1, 568—592 (1938). — E. W. Fell: Yielding Phenomena and Distorsion in Iron, Steel, Aluminium Alloy and Other Metals Under Stress. Iron Steel Inst. **26**, 123—163 (1937).

zementit) hervorgerufen wird. Es hat sich jedoch gezeigt, daß auch Einkristalle, bei welchen ja keine Korngrenzsubstanz vorhanden ist und auch die besonderen Gitterstörungen an den Korngrenzen fehlen, eine ausgeprägte Streckgrenze aufweisen können⁴.

Nach eingehenden Untersuchungen versucht man heute, die ausgeprägte Streckgrenze auf Grund des atomistischen Gleitvorganges zu erklären^{5, 6, 7}. Hierbei sollen bestimmte im Gitter an bevorzugten Stellen eingelagerte Fremdatome die Labilitätserscheinung am Fließbeginn verursachen. Das Auftreten einer ausgeprägten Streckgrenze hängt danach vom Verteilungsgrad der Fremdatome ab, der durch Wärmebehandlung oder Verformung verändert werden kann.

Zur prüftechnischen Ermittlung der Kennwerte eines Werkstoffes sind gewisse Voraussetzungen erforderlich, die praktisch nur angenähert erfüllt werden können. Bei Bestimmung der Streckgrenze im Zug- und im Druckversuch wird angenommen, daß die Spannungsverteilung homogen ist, das heißt daß bei Belastung in jedem Elementarteilchen des Werkstoffes ein gleichartiger und gleichgroßer Spannungszustand herrscht. Beim Biege- und Torsionsversuch wird angenommen, daß die Spannungen von der Randfaser zur Nullachse linear abfallen. Vom Werkstoff wird vorausgesetzt, daß er bezüglich seines Fließverhaltens homogen ist. Schließlich hängt auch die Lastanzeige bei plötzlicher Änderung des Verformungswiderstandes von der Bauart der Prüfmaschine ab. Wird durch Änderung des Verformungswiderstandes die Verformungsgeschwindigkeit größer als die Belastungsgeschwindigkeit, treten also Beschleunigungen auf, so führen diese zu einer kleineren Lastanzeige, als dem tatsächlichen Verformungswiderstand entspricht. Der scheinbare Lastabfall ist von den Federungseigenschaften des Prüfsystems abhängig. Es könnte daher möglich sein, daß ein Spannungsabfall an der oberen Streckgrenze durch die Prüfmaschine vorgetäuscht wird. Im allgemeinen sind die Beschleunigungen, welche durch die Änderung des Verformungswiderstandes auftreten, viel kleiner als die Erdbeschleunigung, so daß bei Maschinen mit unmittelbarer Gewichtsbelastung kein Spannungsabfall stattfinden kann.

Der geforderte ideale Spannungszustand in den Proben kann praktisch nie erreicht werden, da die Kraftübertragung von der Prüfeinrichtung auf die Probe stets von Teilbereichen der Oberfläche aus erfolgt und in diesen Bereichen zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung führt. Dadurch treten an den genannten Stellen Spannungsüberhöhungen gegenüber der rechnerischen Mittelspannung auf, welche den Fließbeginn bestimmen. Den örtlichen Spannungserhöhungen durch die Kräfteinleitung überlagern sich solche, die durch die Form der Probe bedingt sind. So tritt bekanntlich bei Zugproben an den Übergängen von Stabschaft zum Einspannkopf eine Kerbwirkung, also eine ungleichmäßige Spannungsverteilung über dem Probenquerschnitt mit den größten Spannungen an der Oberfläche auf. Entspricht weiters die Kraftübertragung nicht den geometrischen Bedingungen, so daß sich eine weitere Belastungsart überlagert, so ergibt sich ebenfalls eine ungleichmäßige Spannungsverteilung, das heißt eine örtliche Spannungserhöhung über der rechnerischen Mittelspannung, die unberücksichtigt bleibt. Solche Fehler entstehen z. B. beim Zug- und beim Druckversuch durch Außermittigkeiten der Kraftübertragung,

⁴ M. Gensamer: The Yield Point in Metals. Technical Publication Nr. 894, Amer. Inst. min. metallurg. Engr., Februar 1938.

⁵ W. Köster: Einfluß der Zustandsänderungen unterhalb A_1 auf die Eigenschaften des technischen Eisens. Arch. Eisenhüttenwes. **21**, 305—314 (1950).

⁶ G. Masing: Streckgrenze und Alterung bei weichem Stahl. Arch. Eisenhüttenwes. **21**, 315—325 (1950). — E. Houdremont: Arch. Eisenhüttenwes. **22**, 36—64 (1951).

⁷ F. Vitovec: Über die athermische Plastizität und die Kerbwirkung beim Gleitvorgang. Österr. Ingenieur-Arch. **6** (1952).

beim Biege- und Torsionsversuch durch Zugspannungen, welche durch die Auflagerung hervorgerufen werden. An der Stelle der größten Beanspruchung, meist den Übergangsstellen der Probe von Einspannung zu Prüfabschnitt, wird die Fließgrenze zuerst überschritten, es setzt die plastische Verformung ein, die sich nach und nach über die ganze Probe erstreckt⁸. Es ist daher verständlich, daß sich bei Zug-, Druck-, Biege- und Verdrehungsversuchen die zum Teil nur örtlichen Abweichungen des Spannungsverlaufes vom rechnungsmäßigen in Unterschieden in der nach den verschiedenen Prüfverfahren, jedoch am gleichen Werkstoff ermittelten Streckgrenze bemerkbar machen. Da man dabei systematische Fehler begeht, ergeben sich auch systematische Abweichungen. So kann man bei mechanischen Prüfverfahren, bei welchen ein Spannungsgefälle auftritt, eine Fließgrenzenerhöhung feststellen, wenn man den linearen Spannungsabfall, wie er sich nach der Elastizitätstheorie ergibt, der Rechnung zugrunde legt. Zahlreiche Erklärungsversuche für diese Streckgrenzenerhöhung wurden veröffentlicht⁹. Neben verschiedenen anderen Theorien behauptet sich vor allem heute die Vorstellung der „Stützwirkung“, welche bei Vorhandensein eines Spannungsgefälles die weniger beanspruchten Teile auf die höher beanspruchten ausüben sollen, womit schließlich eine Streckgrenzenerhöhung erklärt werden könnte. F. Rinagl¹⁰ konnte durch angenäherte Berücksichtigung des wahren Spannungsverlaufes am Biegeversuch nachweisen, daß die Streckgrenzenüberhöhung durch die dem üblichen Berechnungsverfahren zugrunde gelegten Voraussetzungen größtenteils vorgetäuscht wird. Es mag jedoch nicht in Abrede gestellt werden, daß bei Vorhandensein eines Spannungsgefälles eine gewisse Stützwirkung und damit eine Erhöhung der Fließgrenze¹¹ auftritt, doch kann man diese Frage erst beurteilen, wenn man dem wirklichen Spannungszustand Rechnung trägt.

Systematische Untersuchungen über die Streckgrenze von weichem Stahl beim Zugversuch von E. Siebel, S. Schwaigerer, A. Krisch und H. Esser¹², F. Übel¹³ und E. Siebel und S. Schwaigerer¹⁴ haben ergeben, daß unter den Voraussetzungen gleich großer Spannungen über dem Querschnitt bei weichem Flußstahl eine ausgeprägte Streckgrenze auftritt, nach deren Erreichen das Fließen einsetzt. Bei unmittelbarer Gewichtsbelastung verläuft die Spannungs-Dehnungs-Linie nach Überschreiten der Streckgrenze waagrecht. Bei zwangsläufiger Dehnung des Prüfstabes fällt die Belastung bzw. Spannung nach Erreichen der (oberen) Streckgrenze auf einen kleineren Wert, der unteren Streckgrenze ab. Der Verlauf des Lastabfalles ist durch die Federungseigenschaften des Systems Probe—Prüfmaschine bedingt. Änderungen der Belastungsgeschwindigkeit innerhalb der üblichen Grenzen haben auf die obere

⁸ W. Kuntze und G. Sachs: Zur Kenntnis der Streckgrenze von Stahl. Z. Ver. dtsh. Ing. 72, 1011—1016 (1928). — F. Vitovec und A. Slibar: Bestimmung der Form der beim Zugversuch sich ausbildenden Einschnürung. Österr. Ingenieur-Arch. 4, 75—88 (1950).

⁹ Vgl. die zusammenfassenden Darstellungen bei F. Rinagl: l. c., bzw. J. Fritsche: Grundlagen der Plastizitätstheorie. 2. Kongr. d. int. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau. Berlin-München. 1936.

¹⁰ F. Rinagl: Über die Fließgrenze bei Zug- und Biegebeanspruchung. Bau-Ing. 17, 431—442 (1936); Z. Ver. dtsh. Ing. 80, 1199 (1936).

¹¹ Vgl. F. Bollenrath und A. Troost: Wechselbeziehung zwischen Spannungs- und Verformungsgradient. Arch. Eisenhüttenwes. 21, 431—436 (1950); 22, 327—335 (1951); 23, 193—201 (1952).

¹² E. Siebel, S. Schwaigerer, A. Krisch und H. Esser: Die Streckgrenze beim Zugversuch unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses der Belastungsweise und der Maschinenfederung. Arch. Eisenhüttenwes. 11, 319—328 (1937/38).

¹³ F. Übel: Der Einfluß der Einspannbiegung auf den Verlauf der Spannungs-Dehnungskurve beim Zugversuch. Arch. Eisenhüttenwes. 11, 329—336 (1937/38).

¹⁴ E. Siebel und S. Schwaigerer: Einfluß der Prüfbedingungen auf die Ausbildung der Streckgrenze bei weichem Flußstahl. Arch. Eisenhüttenwes. 13, 37—52 (1939/40).

Streckgrenze einen geringen, auf die untere Streckgrenze einen erheblichen Einfluß. Überlagert sich der reinen Zugbeanspruchung eine Biegebeanspruchung, tritt also ein bestimmtes Spannungsgefälle auf, so wird die obere Fließgrenze vermindert.

Außer den genannten Einflüssen sind auch noch die durch den Werkstoff bedingten zu berücksichtigen. Bekanntlich sind die technischen Werkstoffe nicht ideal homogen, so daß durch Ungleichmäßigkeiten im Werkstoff auch ungleichmäßige Verformungen entstehen, die schließlich zu einer Veränderung des Beanspruchungszustandes führen. Dies hat örtliche Spannungsüberhöhungen zur Folge, welche die Streckgrenze beeinflussen⁸.

Neuere röntgenographische Untersuchungen¹⁵ haben ergeben, daß sich auch bei Stahl einzelne an der Oberfläche liegende Kristallite bereits bei Spannungen plastisch verformen, die in der Größenordnung der Einkristallstreckgrenze liegen.

Die Versuche von F. Bollenrath, V. Hauk und E. Osswald¹⁶, A. Schaal¹⁷ und F. Bollenrath und E. Osswald¹⁸ zeigen weiterhin, daß an der Oberfläche die plastische Verformung im Mittel bei Spannungen von der halben Streckgrenze beginnt. Dies ist nach F. Vitovec und A. Slibar¹⁹ auf Grund der gegenseitigen Verformungsbehinderung der Kristallite zu erklären. Wie bekannt, erfolgt die plastische Verformung kristalliner Werkstoffe unterhalb der Rekristallisationstemperatur vorwiegend durch Gleitung auf bestimmten kristallographischen Ebenen. Die vielkristallinen metallischen Werkstoffe sind aus einer großen Anzahl miteinander verwachsener Kristallite aufgebaut, deren Gleitflächenorientierungen untereinander nicht übereinstimmen. Bei der plastischen Verformung eines Vielkristalls werden daher wesentliche Gitterverzerrungen hervorgerufen.

Der Verformungswiderstand des vielkristallinen Werkstoffes wird demnach durch den Gleitwiderstand in Richtung der kristallographisch bestimmten Gleitflächen, durch den Winkel, den die zur Wirkung kommenden Gleitflächen mit der Verformungsrichtung einschließen, und durch die gegenseitige Behinderung der einzelnen, miteinander verwachsenen Kristallite bestimmt. Untersuchungen über den Mechanismus der Verformung im Vielkristall lassen sich daher nur auf Grund statistischer Überlegungen durchführen. Mittelwertbildungen des Gleitwiderstandes über alle Gleitflächenorientierungen des Vielkristalls wurden von G. Sachs²⁰ unter Vernachlässigung des Zusammenhanges der Kristallite durchgeführt.

Um auf die Frage der gegenseitigen Verformungsbehinderung der Kristallite näher einzugehen, ist zu untersuchen, in welchem Maße die ein bestimmtes Korn umgebenden Kristallitschichten an dessen Fließbehinderung beteiligt sind. Die Einwirkung einer beliebigen (kugelförmigen) Kristallitschicht (kollektiv) auf ein mittiges Bezugskorn hängt wesentlich von der Orientierung ihrer Elemente zum Bezugskorn ab. Die gegenseitige Gleitbehinderung wird um so größer sein, je mehr die kristallographischen Orientierungen zweier Körner im Mittel voneinander abweichen. Die

¹⁵ G. Frommeyer und E. G. Hofmann: Röntgenographische Spannungsmessungen an einzelnen Kristalliten eines auf Zug beanspruchten Stahles. Z. Metallkunde **43**, 151—158 (1952).

¹⁶ F. Bollenrath, V. Hauk und E. Osswald: Röntgenographische Spannungsmessungen bei Überschreiten der Fließgrenze an Zugstäben aus unlegiertem Flußstahl. Z. Ver. dtsh. Ing. **83**, 129—132 (1939).

¹⁷ A. Schaal: Z. Metallkunde **36**, 153 (1944).

¹⁸ F. Bollenrath und E. Osswald: Röntgenographische Spannungsmessung bei Überschreiten der Druckfließgrenze an unlegiertem Stahl. Z. Ver. dtsh. Ing. **84**, 539—541 (1940).

¹⁹ F. Vitovec und A. Slibar: Über den Einfluß der freien Oberfläche auf die Verformungsbehinderung im vielkristallinen Werkstoff. Schweiz. Arch. **16**, 76—80 (1950).

²⁰ G. Sachs: Zur Ableitung einer Fließbedingung. Z. Ver. dtsh. Ing. **72**, 734—736 (1928).

Behinderungsbeiträge der ein Korn umgebenden Schichten nehmen mit größer werdendem Abstand von diesem zunächst langsam ab und konvergieren nach einigen Kornabständen rasch gegen Null²¹.

In der unendlich ausgedehnten Probe sind sämtliche Kristallite im Mittel gleich stark an der Verformung behindert. Bei endlichem Körper hat jedoch die freie Oberfläche und damit die Form und Größe der Probe mitunter einen wesentlichen Einfluß auf das Verformungs- sowie auf das Festigkeitsverhalten. Für Kristallite in Oberflächennähe ist der für die maximale Behinderung erforderliche Behinderungsbereich unvollständig; es fehlen Kristallite zur Verformungsbehinderung. Ein an der ebenen Oberfläche liegendes Korn wird im Grenzfall lediglich einen nahezu halbkugelförmigen

Bereich umschrieben haben. Solche Kristallite verformen sich bei niedrigeren Spannungen als die im Inneren der Probe gelegenen. Für Kristallite, die unmittelbar an der ebenen Oberfläche liegen, ist daher die Verfor-

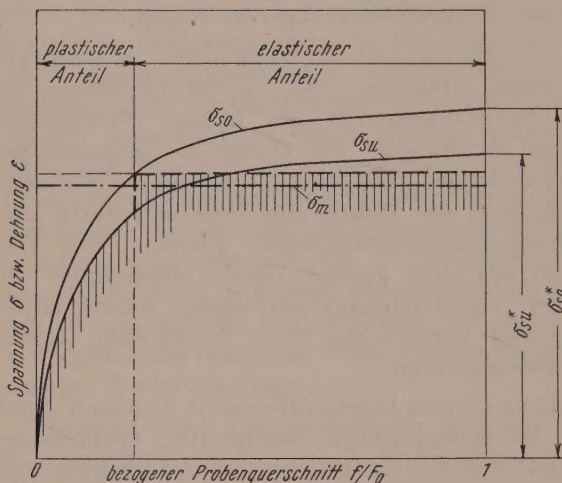


Abb. 1. Schematische Darstellung des Fließgrenzenverlaufes über dem bezogenen Querschnitt der Probe.

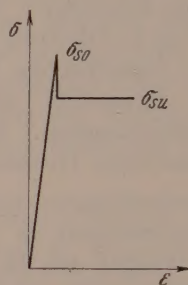


Abb. 2. Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie eines Raumelementes.

mungsbehinderung im Mittel nur halb so groß als für Kristallite im Inneren der Probe¹⁹. Örtliches Fließen wird daher im Mittel bei einer Spannung einsetzen, die sich aus der Summe der mittleren Einkristallfließgrenze und etwa dem halben Wert der Spannungserhöhung durch Verformungsbehinderung (Spannungsverfestigung) ergibt.

Mit Hilfe der Röntgenspannungsmessung konnte festgestellt werden, daß beim Biegeversuch keine Spannungsüberhöhung auftritt²². Überschreitet nämlich die Randspannung die Zugstreckgrenze, so beginnt das Fließen und es entsteht ein Spannungszustand, wie er in der Rinaglschen Theorie vorausgesetzt wird.

Infolge der statistischen Schwankungen der Orientierungen der einzelnen Kristallite und der Verformungsbehinderung durch die Umgebung wird die Fließgrenze mancher Kristallite sogar über der mittleren Streckgrenze der Probe liegen. Mit Berücksichtigung des Oberflächeneinflusses ergibt sich dann ein Verlauf der Fließgrenzen über dem Querschnitt einer Probe, ohne daß zunächst Näheres über die örtliche Verteilung der Spannungen etwas ausgesagt wird, wie er in Abb. 1 schematisch dargestellt ist.

²¹ A. Slibar und F. Vitovec: Über den Wirkungsbereich der Spannungsverfestigung. Schweiz. Arch. 16, 80—84 (1950).

²² F. Bollenrath und E. Schiedt: Röntgenographische Spannungsmessungen bei Überschreiten der Fließgrenze an Biegestäben aus Flußstahl. Z. Ver. deutsch. Ing. 82, 1094—1098 (1938). — R. Böcklen und R. Glocker: Röntgenographische und mechanische Untersuchung des Fließvorganges bei Biegung. Z. Metallforschung 2, 304—309 (1947).

Der Verlauf der örtlichen Fließgrenzen über dem bezogenen Querschnitt der Probe kann etwa durch folgende Funktionen dargestellt werden:

$$\text{obere Streckgrenze:} \quad f/F_0 = k_1 \cdot \sigma_{so}^n, \quad (1)$$

$$\text{untere Streckgrenze:} \quad f/F_0 = k_2 \cdot \sigma_{su}^n. \quad (2)$$

Darin bedeuten F_0 den Gesamtquerschnitt der Probe, f jenen Querschnittsanteil, in welchem die obere Fließgrenze überschritten ist, sowie k_1 , k_2 und n Konstanten. Die Einkristallstreckgrenze kann als vernachlässigbar klein gegenüber der Vielkristallstreckgrenze angenommen werden, so daß die Verteilungskurve ohne nennenswerten Fehler bei der Spannung Null beginnt. Weiters kann man annehmen, daß für einen infinitesimalen Flächenteil df die Spannungs-Dehnungs-Linie so verläuft, wie sie in Abb. 2 schematisch dargestellt ist. Danach sinkt nach Überschreiten der oberen Streckgrenze der örtliche Verformungswiderstand auf die untere Streckgrenze und bleibt dann unveränderlich. Setzt man voraus, daß die Querschnitte eben bleiben, das heißt daß alle Teilchen der Probe eine gleichgroße Formänderung erfahren, so kann man für reine Zug- bzw. Druckbeanspruchung folgende Gleichgewichtsbedingung aufstellen:

$$P = F_0 \cdot \sigma_m = \int_0^{f^*} \sigma_{su} \cdot df + \sigma_{so} (F_0 - f^*). \quad (3)$$

σ_m bedeutet die rechnermäßige mittlere Spannung.

Setzt man Gl. (1) und (2) in Gl. (3) ein, so ergibt sich die mittlere Spannung σ_m als Funktion der Dehnung ε zu:

$$\sigma_m = \varepsilon \cdot E \left\{ 1 - (\varepsilon \cdot E)^n \left[k_1 - \frac{n}{1+n} \frac{k_1^{\frac{1+n}{n}}}{k_2^{1/n}} \right] \right\}. \quad (4)$$

Die Spannung σ_m hat ein Maximum bei der Dehnung

$$\varepsilon_{kr} = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{(n+1)} \left(k_1 - \frac{n}{1+n} \frac{k_1^{\frac{1+n}{n}}}{k_2^{1/n}} \right) \right]^{1/n}. \quad (5)$$

Mit Gl. (5) ergibt sich aus Gl. (4) die zugehörige mittlere obere Streckgrenze $\bar{\sigma}_{so}$.

Das Kriterium für Erreichen dieser Streckgrenze ergibt sich dadurch, daß bei Dehnung um $d\varepsilon$ der Verlust an Tragvermögen durch Absinken der Spannung von der oberen auf die untere Streckgrenze größer wird als die Zunahme durch Erhöhung der Spannungen im elastisch verformten Restquerschnitt. Damit ist die Ausbildung einer ausgeprägten Streckgrenze mathematisch auf ein Stabilitätsproblem zurückgeführt, wobei berücksichtigt wurde, daß in Teilbereichen des Werkstoffes die Streckgrenze schon unterhalb der mittleren im mechanischen Prüfverfahren bestimmten Streckgrenze überschritten wird, während in anderen Bereichen die örtliche Streckgrenze über der versuchsmäßigen liegt. Es braucht hierzu keine Aussage gemacht zu werden, wie die tatsächliche örtliche Verteilung der Streckgrenzen ist.

Zur Überprüfung der Formeln wurden Zugversuche mit einem normalgeglühten Elektrostahl von 0.11% C, 0.50% Mn, 0.19% Si, 0.03% S und 0.01% P ausgeführt. Um die Kerbwirkung durch die Probenform weitgehend zu vermindern, wurde der Übergang von Stabschaft zu Einspannknopf hyperbolisch ausgeführt. Zur möglichsten Vermeidung von Biegespannungen wurden die Stäbe mit Gewindeköpfen versehen und kugelig gelagert.

Die mittlere obere Streckgrenze betrug $\sigma_{so} = 29 \text{ kg/mm}^2$, die mittlere untere Streckgrenze $\bar{\sigma}_{su} = 23.2 \text{ kg/mm}^2$. Mit den zugehörigen Dehnungen ergibt sich für $n = 23.2$, $k_1 = 9.536 \cdot 10^{-33}$, $k_2 = 5.90 \cdot 10^{-36}$, $\sigma_{so}^* = 33 \text{ kg/mm}^2$ und $\sigma_{su}^* =$

$= 24 \text{ kg/mm}^2$. Die obere Streckgrenze wird erreicht bei $\sigma_{sokr} = 30.27 \text{ kg/mm}^2$ und einer Dehnung von $\varepsilon_{kr} = 0.138\%$. Die mit diesen Werten aus Gl. (4) ermittelte Spannungs-Dehnungs-Linie ist in Abb. 3 dargestellt.

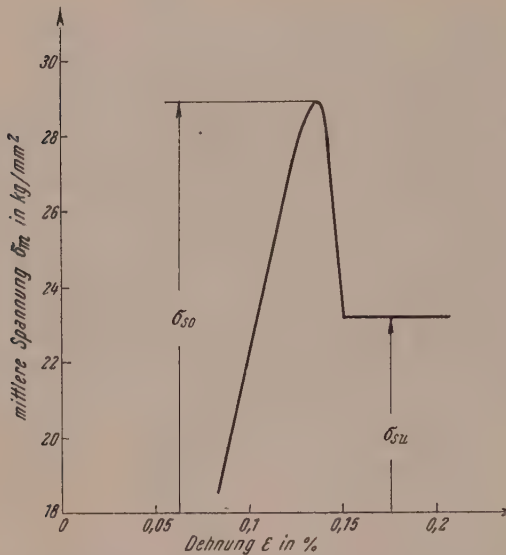


Abb. 3. Mittlere Spannungs-Dehnungs-Linie nach Gl. (3).

Zur Untersuchung, wie sich ein Spannungsgefälle auf die Streckgrenze auswirkt, müssen für die örtliche Verteilung der Streckgrenzen bestimmte Annahmen gemacht werden. Es sind daher zunächst nur qualitative Aussagen möglich. So kann man beispielsweise annehmen, daß die örtlichen Fließgrenzen von der Oberfläche der Probe nach dem Inneren entsprechend Gl. (1) und (2) ansteigen. Es sei zunächst untersucht, wie sich bei einer zentralsymmetrischen Probe ein ebensolcher Eigenspannungszustand bei Zug- oder Druckbeanspruchung auf die mittlere Streckgrenze auswirkt. Es wird angenommen, daß das Spannungsgefälle konstant ist, womit $(F_0 - f)/F_0 = \sigma_{so}'/C$. C bedeutet die Neigung des Spannungsgefälles, σ_{so}' ist Abb. 4 zu entnehmen. Für Gleichgewicht ist

$$P = \sigma_m \cdot F_0 = \int_0^{f^*} \sigma_{su} \cdot df + \sigma_{so} (F_0 - f) - C (F_0 - f)^2 / 2 F_0^2. \quad (6)$$

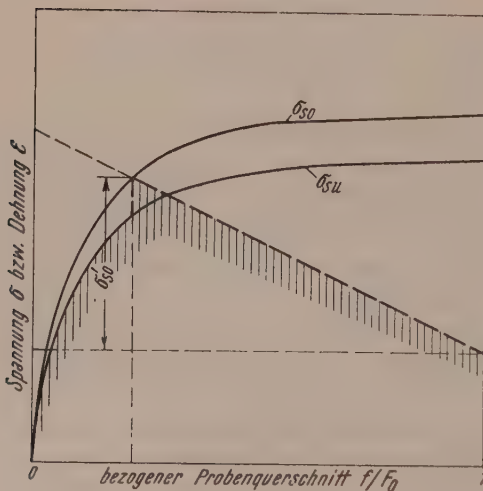


Abb. 4. Schematische Darstellung der Spannungsverteilung bei einem konstanten Spannungsgefälle.

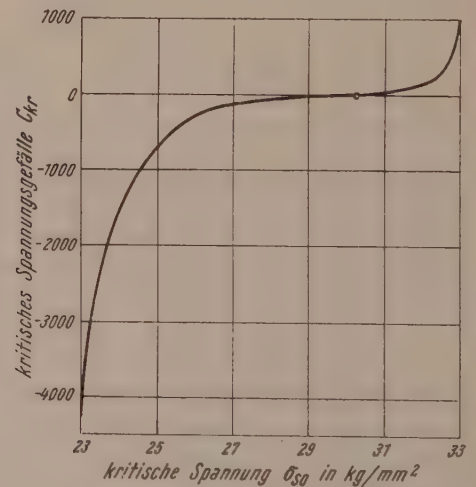


Abb. 5. Einfluß des Spannungsgefälles auf die mittlere Streckgrenze.

Unter Berücksichtigung von Gl. (1) und (2) ergibt sich für die mittlere Spannung σ_m

$$\sigma_m = \frac{n}{1+n} \cdot \frac{k_1^{1+n}}{k_2^{1+n}} \cdot \sigma_{so}^{n+1} + \sigma_{so} - k_1 \sigma_{so}^{n+1} - (1 - k_1 \sigma_{so}^n)^2 \cdot C / 2. \quad (7)$$

Die mittlere Spannung erreicht ein Maximum bei einer bestimmten örtlichen oberen Streckgrenze σ_{so} , wenn das Spannungsgefälle folgenden Wert annimmt:

$$C_{kr} = \frac{\left[n \frac{k_1}{k_2^{1/n}} - (n+1) k_1 \right] \sigma_{so}^n + 1}{(n k_1^2 \sigma_{so}^{2n-1} - n k_1 \cdot \sigma_{so}^{n-1})}. \quad (8)$$

Mit Hilfe von σ_{so} und C_{kr} kann das zugehörige σ_m aus Gl. (7) berechnet werden. Die zugehörige mittlere Dehnung kann man etwa nach Abb. 4 zu

$$\varepsilon_m = \left[\sigma_{so} + C \left(k_1 \sigma_{so}^n - \frac{1}{2} \right) \right] / E \quad (9)$$

bestimmen.

Mit den aus dem Zugversuch ermittelten Konstanten wurde der Einfluß des Spannungsgefälles auf die Streckgrenze untersucht und in Abb. 5 dargestellt. Daraus ist ersichtlich, daß das Spannungsgefälle nach dem dargestellten Mechanismus auf die Streckgrenze nur geringen Einfluß hat. Es ist daher anzunehmen, daß für die beobachteten Fließgrenzenerhöhungen auch eine Stützwirkung vorhanden sein muß.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für den Fall der reinen Torsion anstellen, bei der das Spannungsgefälle vom Verformungsgrad abhängig ist. Hierbei ergibt sich jedoch auf Grund der Annahmen kein maximales Moment, sondern es steigt das Moment von Null stetig und monoton an und erreicht einen Größtwert bei unendlich großer Verformung. Dies entspricht nicht den Versuchsergebnissen, da sowohl bei Biege- als auch bei Torsionsversuchen eine ausgeprägte Streckgrenze festzustellen ist. Die Ursache dieser Unstimmigkeit liegt, wie bereits vermerkt, in der Annahme einer bestimmten örtlichen Verteilung der Streckgrenzen, die nicht mit den wirklichen Verhältnissen übereinstimmt. Die Teilchen verschiedener Streckgrenze sind im Werkstoff statistisch verteilt. Dieser Verteilung überlagert sich der Einfluß der freien Oberfläche. Man hat es daher auch beim Biege- und Verdrehungsversuch eher mit einem Fall zu tun, der der gleichmäßigen Beanspruchung, wie er für den Zug- oder Druckversuch vorgeführt wurde, ähnlich ist.

Es ist naheliegend, daß durch Veränderung der örtlichen Fließgrenzenverteilung auch die mittlere Streckgrenze verändert werden kann. Solche Veränderungen sind z. B. durch Diffusion (Nitrieren usw.) oder teilweise plastische Verformung möglich.

(Eingegangen am 8. Juni 1952.)

Elastostatische Grundformeln für allgemeine krummlinige Koordinaten.

Von J. Krettner, München.

Zusammenfassung. Die wichtigsten Grundformeln der Elastizitätstheorie werden im Falle allgemeiner krummliniger Koordinaten mittels der Methode der Tensorrechnung ohne die übliche Gleichgewichtsbetrachtung am Elementarkörper hergeleitet. Die Ergebnisse werden auf Kugel- und Zylinderkoordinaten angewandt, in der Absicht, die Sonderbehandlung der Rotationsschalen vorzubereiten.

Summary. The basic formulas of the theory of elasticity are derived by means of the tensor calculus for the case of general curvilinear coordinates, without considering, as usual, the equilibrium of the volume elements. The results are applied to spherical and cylindrical coordinates, and it is intended to prepare a special treatment of rotation shells.

Résumé. Les formules fondamentales de la théorie d'élasticité sont déduites, en cas de coordonnées générales curvilignes, par la méthode de calcul des tenseurs, sans la considération usuelle de l'équilibre des corps élémentaires. On applique les résultats aux coordonnées sphériques et cylindriques pour préparer le traitement spécial des surfaces de rotation.

1. Einleitung.

In vielen elastostatischen Untersuchungen ist es erforderlich, besondere (meist krummlinige) Koordinaten einzuführen und die Formeln auf dieses Bezugssystem zu transformieren. Die vielfach übliche Betrachtung eines diesen Koordinaten angepaßten Elementarkörpers erweist sich als ziemlich umständlich und nicht immer vollständig zuverlässig. Wir wollen daher im folgenden die Methode der Tensorrechnung heranziehen, die es ermöglicht, fast ohne Anschauung der Figur einen auf allgemeine Koordinaten bezüglichen elastostatischen Formelapparat zu gewinnen, aus dem alle Sonderfälle, z. B. auch die entsprechenden Formeln für Zylinder-, Kugel- und allgemeine schiefwinklige Koordinaten, ohne Schwierigkeit abgeleitet werden können. Die Entwicklungen verfolgen den besonderen Zweck, die Behandlung einiger technisch wichtiger Probleme, insbesondere die Statik der Rotationsschalen vorzubereiten¹.

2. Allgemeine krummlinige Koordinaten im dreidimensionalen Raum.

In einem dreidimensionalen Raum seien die Koordinaten der Raumpunkte als Funktionen dreier reeller Parameter u^1, u^2, u^3 gegeben

$$x^i = x^i(u^1, u^2, u^3). \quad (1)$$

Damit ist auch der vom Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems zum Raumpunkt P führende Ortsvektor \mathbf{r} eine Funktion der drei Parameter $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) = \sum_{i=1}^3 x^i(u^1, u^2, u^3) \mathbf{e}_i$, wobei die Vektoren \mathbf{e}_i die Einheitsvektoren des kartesischen Systems sind und der Bedingung $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 1$ bzw. 0 für $i = k$ bzw. $i \neq k$ genügen. Für das Differential des Ortsvektors $d\mathbf{r}$ ergibt sich, wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \mathbf{r}_i$ gesetzt wird:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_k \frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right) \mathbf{e}_i = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \mathbf{e}_i \right) du^k = \sum_k \mathbf{r}_k du^k. \quad (2)$$

Die drei Raumkurven, die entstehen, wenn man in $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$ je nur einen Parameter veränderlich annimmt, bilden das krummlinige Koordinatensystem mit den entsprechenden Tangentenvektoren \mathbf{r}_k als jeweilige Achsenvektoren.

Das skalare Produkt des Differentials $d\mathbf{r}$ mit sich selbst ergibt die sog. metrische Fundamentalform in krummlinigen Koordinaten:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{r}_i du^i \cdot \sum_k \mathbf{r}_k du^k = \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k) du^i du^k = \sum_{i,k} g_{ik} du^i du^k.$$

Die skalaren Produkte $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k$ bzw. $\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i$ sind mit g_{ik} bzw. g_{ki} wie üblich bezeichnet. Da mit dem Ortsvektor \mathbf{r} auch dessen Ableitungen \mathbf{r}_k ortsabhängig sind, gilt dies auch für die g_{ik} als skalare Produkte der \mathbf{r}_k .

Für die krummlinigen Koordinaten wird nun, wie im affinen Koordinatensystem, ein reziprokes System durch die Vektoren

$$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}; \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}; \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} \quad (3)$$

¹ Vgl. A. F. Green und W. Zerna: Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys. London VII, 41, 313—336 (1950). — J. Fadler: Ingenieur-Arch. 17, 62—70 (1949). — Ferner die Lehrbücher für Vektorrechnung: M. Lagally: Vorlesung über Vektorrechnung. Berlin. 1949. — E. Lohr: Vektor- und Dyadenrechnung. Berlin. 1939. — A. Lotze: Vektor- und Affinoranalysis. München. 1950. — F. Ollendorff: Welt der Vektoren. Wien. 1950.

mit $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = 1$ bzw. 0 für $i = k$ bzw. $i \neq k$ eingeführt. Das skalare Produkt $\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^k$ wird mit g^{ik} bezeichnet.

Bezeichnet man die Determinante der Vektoren des krummlinigen Systems mit $g = |g_{ik}|$ und die des reziproken Systems mit $\bar{g} = |g^{ik}|$, so gilt stets $g \cdot \bar{g} = 1$.

Man kann nun den Ortsvektor \mathbf{r} , je nachdem wir diesen auf das \mathbf{r}_k -System oder auf das \mathbf{r}^k -System beziehen, in der Form $\mathbf{r} = \sum_i u^i \mathbf{r}_i$ bzw. $\mathbf{r} = \sum_i u_i \mathbf{r}^i$ darstellen. Für die Projektionen des Vektors auf die Achsen des krummlinigen Systems ergibt sich damit

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i = u_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} u^k, \quad (4)$$

für die Projektionen auf die Achsen des reziproken Systems dagegen

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i = u^i = \sum_k g^{ik} u_k, \quad (5)$$

womit zugleich der Zusammenhang zwischen den sog. kovarianten Komponenten u_k und den kontravarianten Komponenten u^k gegeben ist.

Ist nun $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(u^1 u^2 u^3)$ ein dem Raumpunkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} zugeordneter Vektor, so erhält man für das Differential des Vektors \mathbf{v} , wenn man die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i} = \mathbf{v}_i$ setzt:

$$d\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i du^i. \quad (6)$$

Aus (2) erhält man durch skalare Multiplikation mit den reziproken Vektoren $\mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r} = du^i$, womit das Differential des Vektors \mathbf{v}

$$d\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r}) = \sum_i d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{v}_i = d\mathbf{r} \cdot \sum_i \mathbf{r}^i \mathbf{v}_i = d\mathbf{r} \cdot \mathfrak{B}$$

wird. Dabei ist

$$\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}^i \mathbf{v}_i \quad (7)$$

ein Tensor II. Stufe, der sog. Gradiententensor des Vektors \mathbf{v} . Das Differential $d\mathbf{v}$ ist somit das skalare Produkt des Differentials $d\mathbf{r}$ mit dem Gradiententensor von \mathbf{v} .

Der zu diesem Tensor \mathfrak{B} konjugierte Tensor $\bar{\mathfrak{B}}$ ist durch $\bar{\mathfrak{B}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i$ gegeben.

3. Grundformeln der Elastizität in krummlinigen Koordinaten.

Werden nun in einem elastischen Medium den Punkten P durch irgendeine Deformation die Verrückungen \mathbf{v} zugeordnet und erfährt der Punkt P_0 die Verrückung \mathbf{v}_0 , so erfährt der vom Punkte P_0 um $d\mathbf{r}$ entfernte Punkt P die Verrückung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{r} \cdot \mathfrak{B}. \quad (8)$$

Man kann den Gradiententensor als Summe seines symmetrischen Teiles

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} (\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{B}}) \quad (9)$$

und seines asymmetrischen Teiles

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} (\mathfrak{B} - \bar{\mathfrak{B}})$$

in der Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D} + \mathfrak{A}$$

darstellen. Der asymmetrische Teil des Gradiententensors bewirkt eine infinitesimale starre Drehung des Bereiches um P , der symmetrische Teil eine reine Deformation. Multipliziert man den Tensor der reinen Deformation skalar mit dem Vektor \mathbf{r}_σ , so erhält man den Vektor

$$\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_\sigma + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_k) \mathbf{r}^k].$$

Durch nochmalige skalare Multiplikation mit dem Vektor \mathbf{r}_σ ergibt sich die skalare Größe

$$D_{\sigma\sigma} = D_{\sigma\sigma} = \mathbf{r}_\sigma \cdot (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma + \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma],$$

die im Falle $\sigma = \varrho$ in

$$D_{\varrho\varrho} = \mathbf{r}_\varrho \cdot (\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathfrak{D}) = \mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{v}_\varrho \quad (10)$$

übergeht.

Bezeichnet man den Einheitsvektor in Richtung \mathbf{r}_k mit $\mathbf{i}_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$, also $\mathbf{r}_k = |\mathbf{r}_k| \mathbf{i}_k$, so wird $D_{\varrho\sigma} = |\mathbf{r}_\sigma| |\mathbf{r}_\varrho| \mathbf{i}_\varrho \cdot (\mathbf{i}_\sigma \cdot \mathfrak{D})$ und $D_{\varrho\varrho} = |\mathbf{r}_\varrho|^2 \mathbf{i}_\varrho \cdot (\mathbf{i}_\varrho \cdot \mathfrak{D})$. Bekanntlich wird nun die Dehnung in Richtung des Vektors \mathbf{r}_ϱ durch

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \mathbf{i}_\varrho \cdot (\mathbf{i}_\varrho \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} D_{\varrho\varrho} \quad (11)$$

und die Winkelausweitung der beiden Vektoren \mathbf{r}_ϱ und \mathbf{r}_σ durch den Ausdruck

$$-\varepsilon_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varrho\varrho} g_{\sigma\sigma} - g_{\varrho\sigma}^2}} \left[2 D_{\varrho\sigma} - g_{\varrho\sigma} \left(\frac{D_{\varrho\varrho}}{g_{\varrho\varrho}} + \frac{D_{\sigma\sigma}}{g_{\sigma\sigma}} \right) \right] \quad (12)$$

gegeben.

Setzt man den Vektor \mathbf{v} der Verrückung mit kovarianten Komponenten an, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{r}^i$, so wird

$$\mathbf{v} = \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_\varrho} \mathbf{r}^i + v_i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^\varrho} \right)$$

und es ergibt sich für die Dehnungen in Richtung der \mathbf{r} -Achse:

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} D_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} (\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{v}_\varrho) = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} \left[\frac{\partial v_\varrho}{\partial u^\varrho} + \sum_{i=1}^3 v_i \left(\mathbf{r}_\varrho \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^\varrho} \right) \right]$$

und für die Größen $D_{\varrho\sigma}$ erhält man:

$$D_{\varrho\sigma} = D_{\sigma\varrho} = \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{v}_\sigma) + (\mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\varrho)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\sigma}{\partial u^\varrho} + \frac{\partial v_\varrho}{\partial u^\sigma} + \sum_i v_i \left(\mathbf{r}_\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^\varrho} + \mathbf{r}_\varrho \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^\sigma} \right) \right].$$

Setzt man $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^k} = \mathbf{r}_{ik}$ und $\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial u^k} = \mathbf{r}^i_{ik}$ und verwendet die bekannten Cristoffel-Symbole $\mathbf{r}^\varrho \cdot \mathbf{r}_{ik} = \Gamma_{ik}^\varrho$ und $\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{r}_{ik} = \Gamma_{\varrho ik}$ mit der Beziehung $\Gamma_{ik}^\varrho = \sum_{\sigma=1}^3 g^{\varrho\sigma} \Gamma_{\sigma ik}$, so ergibt, da $\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{r}^i = \text{konst.}$, die Ableitung nach k $\mathbf{r}_\varrho \cdot \mathbf{r}^i_{ik} = -\Gamma_{\varrho ik}$. Die $\Gamma_{\varrho ik} = \Gamma_{\varrho ki}$ sind dabei nach der bekannten Formel

$$\Gamma_{\varrho ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{i\varrho}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{\varrho k}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^\varrho} \right)$$

aus den g_{ik} zu berechnen.

Mit diesen Symbolen erhalten wir:

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} \left[\frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\varrho}} - \sum_{i=1}^3 v_i \Gamma_{\varrho\varrho}^i \right]; \quad (13)$$

$$D_{\varrho\sigma} = D_{\sigma\varrho} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_{\sigma}}{\partial u^{\varrho}} + \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\sigma}} - 2 \sum_i v_i \Gamma_{\varrho\sigma}^i \right], \quad (14)$$

da $\Gamma_{\varrho\sigma}^i = \Gamma_{\sigma\varrho}^i$ ist.

Für krummlinige orthogonale Systeme vereinfachen sich die Formeln insofern, als zunächst alle $g_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k = g_{ki} = 0$ sind für $i \neq k$. Wir erhalten für die Dehnungen $\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} D_{\varrho\varrho}$ und für die Winkelausweitungen

$$- \varepsilon_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varrho\varrho} g_{\sigma\sigma}}} 2 D_{\varrho\sigma}. \quad (16)$$

Für eine im ganzen Raum konstante, sonst beliebige Basis verschwinden alle Ableitungen der Achsenvektoren und damit auch alle Ableitungen der g_{ik} , was zur Folge hat, daß auch alle $\Gamma_{\varrho\sigma}^i$ und $\Gamma_{\sigma\varrho}^i$ Null werden.

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} D_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\varrho}}; \quad D_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\sigma}}{\partial u^{\varrho}} + \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\sigma}} \right). \quad (17)$$

Für ein beliebiges schiefwinkliges, geradliniges System ergeben sich die Werte

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{1}{g_{\varrho\varrho}} \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\varrho}} \quad \text{und} \quad D_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\sigma}}{\partial u^{\varrho}} + \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\sigma}} \right).$$

Für ein geradliniges rechtwinkliges System sind alle $g_{ik} = 0$ und falls die Vektoren \mathbf{r}_k Einheitsvektoren sind, $g_{ii} = 1$. Es ergeben sich in diesem Falle die bekannten Formeln:

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\varrho}}; \quad - \varepsilon_{\varrho\sigma} = 2 D_{\varrho\sigma} = \frac{\partial v_{\sigma}}{\partial u^{\varrho}} + \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial u^{\sigma}}. \quad (18)$$

4. Spannungstensor in krummlinigen Koordinaten.

Betrachtet man um den Raumpunkt P ein Parallelogramm mit den Kanten parallel zu den Achsen des krummlinigen Systems im Punkte P , so sind die flächennormalen Einheitsvektoren durch die reziproken Vektoren $\mathbf{n}^k = \frac{\mathbf{r}^k}{|\mathbf{r}^k|}$ gegeben. Ist p_i die reduzierte Spannung, die auf dasjenige Flächenelement wirkt, welches auf dem Vektor \mathbf{n}^i senkrecht steht und sind p^{ik} die Projektionen dieser reduzierten Spannung auf die Achsenrichtungen \mathbf{n}^k , so gilt $p^{ik} = \mathbf{n}^k \cdot p_i$ und der Spannungsvektor p_i kann in der Form $p_i = \sum_k p^{ik} \mathbf{n}_k$ angesetzt werden. Der Spannungstensor selbst ist dann durch $\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^3 p_i \mathbf{n}_i$ gegeben oder, wenn wir die Werte für die p_i einsetzen, durch:

$$\mathfrak{S} = \sum_{i,k=1}^3 p^{ik} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_k.$$

Da $\mathbf{n}_k = |\mathbf{r}^k| \mathbf{r}_k$ ist, erhält man für die Spannungskomponenten in bezug auf die einzelnen Achsenrichtungen die folgenden Werte:

$$a^{\varrho\sigma} = \mathbf{r}^{\varrho} \cdot (\mathbf{r}^{\sigma} \cdot \mathfrak{S}) = \sum_{i,k} p^{ik} (\mathbf{r}^{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{r}^{\varrho} \cdot \mathbf{n}_k) = \sum_{i,k} p^{ik} |\mathbf{r}^i| |\mathbf{r}^k| (\mathbf{r}^{\sigma} \cdot \mathbf{r}_i) (\mathbf{r}^{\varrho} \cdot \mathbf{r}_k) = p^{\varrho\varrho} |\mathbf{r}^{\varrho}| |\mathbf{r}^{\sigma}|,$$

$$a_{\varrho\sigma} = \mathbf{r}_{\varrho} \cdot (\mathbf{r}_{\sigma} \cdot \mathfrak{S}) = \sum_{i,k} p^{ik} (\mathbf{r}_{\varrho} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{r}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) = \sum_{i,k} p^{ik} |\mathbf{r}^i| |\mathbf{r}^k| g_{\varrho i} g_{\sigma k}.$$

Für die Projektion der Spannung p_i auf die reziproke Achse r^e folgt:

$$r^e \cdot p_i = r^e \cdot \sum_{k=1}^3 p^{ik} n_k = \sum_{k=1}^3 p^{ik} (r^e \cdot n_k) = \sum_{k=1}^3 p^{ik} |r^k| (r^e \cdot r_k) = p^{ie} \cdot |r^e| = a^{*ie}. \quad (20)$$

Bezieht man die Spannungskomponenten auf diese Werte, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} a^{e\sigma} &= |r^\sigma| a^{*\sigma e}, \\ a_{e\sigma} &= \sum_{i,k=1}^3 |r^i| g_{ei} g_{ek} a^{*ik} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und der Spannungstensor kann in der Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \sum_{i,k} a^{ik} r_i r_k = \sum_{i,k} |r^i| a^{*ik} r_i r_k \\ \text{bzw.} \quad \mathfrak{S} &= \sum_{i,k} a_{ik} r^i r^k = \sum_{i,k} \left(\sum_{e,\sigma} |r^e| g_{ei} g_{\sigma k} a^{*ik} \right) r^i r^k. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

5. Gleichgewichtsbedingungen in krummlinigen Koordinaten.

Die Bedingung des Gleichgewichtes deformierbarer Körper zwischen den äußeren Kräften und den inneren Spannungen in irgendeinem Punkt des Spannungsfeldes lautet bekanntlich:

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} + \mathfrak{K} = 0.$$

Dabei ist \mathfrak{S} der Spannungstensor und \mathfrak{K} die äußere Kraft. Um die Divergenz des Spannungstensors zu erhalten, wird zunächst der Gradiententensor $\operatorname{grad} \mathfrak{S} = \nabla \mathfrak{S}$ von \mathfrak{S} berechnet und daraus dann durch Verjüngung die Divergenz gewonnen. Nun ist

$$\operatorname{grad} \mathfrak{S} = \nabla \mathfrak{S} = \sum_{e=1}^3 r^e \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u^e}.$$

Mit $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a^{ik} r_i r_k$ als ortsabhängiger Tensor ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathfrak{S} &= \sum_{e=1}^3 r^e \frac{\partial \sum_{i,k} a^{ik} r_i r_k}{\partial u^e} = \sum_{e=1}^3 r^e \left(\sum_{i,k} \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^e} r_i r_k + a^{ik} \frac{\partial r_i}{\partial u^e} r_k + a^{ik} r_i \frac{\partial r_k}{\partial u^e} \right) \\ &= \sum_{e,i,k} \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^e} r^e r_i r_k + a^{ik} (r^e r_{ie} r_k + r^e r_i r_{ek}) \right]. \end{aligned}$$

Da $r^\sigma \cdot r_{ie} = \Gamma_{ie}^\sigma$ ist, können wir den Vektor r_{ie} in der Form $r_{ie} = \sum_j \Gamma_{ie}^j r_j$ darstellen und erhalten damit bei geeigneter Anordnung der Indizes $\operatorname{grad} \mathfrak{S} = \sum_{e,i,k=1}^3 r^e r_i r_k \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^e} + \sum_n (a^{nk} \Gamma_{ne}^i + a^{ni} \Gamma_{ne}^k) \right]$, also einen Tensor III. Stufe, der durch Verjüngung in die Divergenz des Tensors \mathfrak{S} übergeht.

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = \sum_{i,k} \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} + \sum_n (a^{nk} \Gamma_{ni}^i + a^{ni} \Gamma_{ni}^k) \right]. \quad (23)$$

Setzen wir noch den Vektor der äußeren Kraft \mathfrak{K} mit $\mathfrak{K} = \sum_{k=1}^3 K^k r_k$ an, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der krummlinigen Achsen r_k :

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} + \sum_{n=1}^3 (a^{nk} \Gamma_{ni}^i + a^{ni} \Gamma_{ni}^k) \right] + K^k = 0; \quad (k = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Für eine im ganzen Raum beliebige geradlinig schiefwinklige Basis nehmen die Gleichgewichtsbedingungen, da alle $\Gamma_{n_i}^k$ Null sind, die einfachere Form

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} \right] + K^k = 0$$

an.

6. Der Zusammenhang zwischen den Deformations- und Spannungskomponenten in krummlinigen Koordinaten.

Der Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Deformationstensor ist durch das Hookesche Gesetz in seiner allgemeinsten Fassung gegeben.

$$\mathfrak{S} = 2\mu \mathfrak{D} + \lambda D \mathfrak{J}.$$

Darin bedeutet \mathfrak{J} den Einheitstensor $\mathfrak{J} = \sum_{i,k} g^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$ bzw. $\mathfrak{J} = \sum_{i,k} g_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$ und die Größe D den Skalar des Deformationstensors \mathfrak{D} . Wird die Konstante von Poisson mit k bezeichnet, so sind die beiden Konstanten von Lamé durch $\mu = \frac{E}{2(1+k)}$ und $\lambda = 2\mu \frac{k}{1-2k}$ gegeben.

Durch zweimalige skalare Multiplikation mit den Vektoren \mathbf{r}_k bzw. \mathbf{r}^k erhält man aus dem Hookeschen Gesetz die allgemeine Spannungs-Deformations-Beziehung. Für $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$, $\mathfrak{D} = \sum_{i,k} \varepsilon^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$ mit $D = \sum_{i,k} \varepsilon^{ik} g_{ik}$ und $\mathfrak{J} = \sum_{i,k} g^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^k \cdot (\mathbf{r}^i \cdot \mathfrak{S}) &= 2\mu \mathbf{r}^k \cdot (\mathbf{r}^i \cdot \mathfrak{D}) + \lambda D \mathbf{r}^k \cdot (\mathbf{r}^i \cdot \mathfrak{J}), \\ a^{ik} &= 2\mu \varepsilon^{ik} + \lambda \left(\sum_{i,k} \varepsilon^{ik} g_{ik} \right) g^{ik}. \end{aligned} \quad (25)$$

Für $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$, $\mathfrak{D} = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$ mit $D = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} g^{ik}$ und $\mathfrak{J} = \sum_{i,k} g_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$ erhalten wir entsprechend die Beziehung:

$$a_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda \left(\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} g^{ik} \right) g_{ik}. \quad (26)$$

Durch Auflösen der allgemeinen Hookeschen Beziehung nach dem Deformationstensor \mathfrak{D} ergibt sich:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\mu} [\mathfrak{S} - \lambda D \mathfrak{J}].$$

Man kann nun noch den Skalar D durch den Skalar S des Spannungstensors ausdrücken, wenn man die Gleichung für das Hookesche Gesetz auf beiden Seiten verjüngt. Man erhält $S = (2\mu + 3\lambda) D$ und, wenn man noch $\frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}$ durch k ausdrückt, die beiden Gleichungen:

$$\varepsilon^{ik} = \frac{1+k}{E} a^{ik} - \frac{k}{E} S g^{ik} \quad \text{mit} \quad S = \sum_{i,k} a^{ik} g_{ik}. \quad (27)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+k}{E} a_{ik} - \frac{k}{E} S g_{ik} \quad \text{mit} \quad S = \sum_{i,k} a_{ik} g^{ik}. \quad (28)$$

7. Der Differentialausdruck von Laplace in krummlinigen Koordinaten.

Setzt man für die partiellen Ableitungen der Funktion $w = w(u^1, u^2, u^3)$ $\frac{\partial w}{\partial u^i} = w_i$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial u^i \partial u^k} = w_{ik}$, so ist der Gradiententensor der Ortsfunktion durch $\text{grad } w =$

$= \sum_i \mathbf{r}^i w_i = w$ gegeben. Für den Operator $\Delta w = \text{div}(\text{grad } w) = \text{div } w$ folgt damit in krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned} \Delta w &= \text{div } w = \sum_{k=1}^3 \mathbf{r}^k \cdot w_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{r}^k \cdot \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{r}_k^i w_i + \mathbf{r}^i w_{i k}) \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^3 (\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_k^i) w_i + (\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^i) w_{i k} = \sum_{i,k=1}^3 \left(g^{k i} w_{i k} - w_i \sum_{n=1}^3 g^{k n} \Gamma_{n k}^i \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Nochmalige Anwendung des Δ -Operators ergibt schließlich:

$$\Delta \Delta w = \text{div}(\text{grad } \Delta w) = \text{div } v = \sum \mathbf{r}^e \cdot v_e,$$

wenn $v = \text{grad } \Delta w = \sum_e \mathbf{r}^e (\Delta w)_e$ gesetzt wird, also

$$v_e = \sum_{\sigma} (\mathbf{r}_e^{\sigma} (\Delta w)_{\sigma} + \mathbf{r}^{\sigma} (\Delta w)_{e \sigma})$$

ist. Damit wird

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= \sum_e \sum_{\sigma} (\mathbf{r}_e^{\sigma} (\Delta w)_{\sigma} + g^{e \sigma} (\Delta w)_{e \sigma}) \\ &= \sum_{e, \sigma=1}^3 (g^{e \sigma} (\Delta w)_{e \sigma} - (\Delta w)_{\sigma} \sum_m g^{e m} \Gamma_{m e}^{\sigma}). \end{aligned} \quad (30)$$

8. Zylinderkoordinaten.

Für Zylinderkoordinaten ist $u^1 = r$, $u^2 = \varphi$, $u^3 = z$. Der Zusammenhang mit einem kartesischen System mit den Einheitsvektoren e_i ist durch $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$, $x^3 = z$. Damit haben wir für den Ortsvektor \mathbf{r} und seine partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \cos \varphi) e_1 + (r \sin \varphi) e_2 + z e_3 & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}, \\ \mathbf{r}_1 &= \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}_1| = 1; \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1 = e_1, \\ \mathbf{r}_2 &= (-r \sin \varphi) e_1 + (r \cos \varphi) e_2 & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}_2| = r; \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_2}{r^2} = \frac{e_2}{r}, \\ \mathbf{r}_3 &= e_3 & \text{mit} & \quad |\mathbf{r}_3| = 1; \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3 = e_3. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} g^{11} = g^{33} &= 1; & g^{22} &= \frac{1}{r^2}; & g^{12} = g^{22} = g^{31} &= 0, \\ g_{11} = g_{33} &= 1; & g_{22} &= r^2; & g_{12} = g_{13} = g_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Da alle g_{ik} Null sind, haben wir es mit einem orthogonalen krummlinigen System zu tun. Setzen wir den Vektor der Verrückung, bezogen auf die Einheitsvektoren $i_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$ der krummlinigen Koordinaten in der Form $v = u i_1 + v i_2 + w i_3$, so sind seine kovarianten Koordinaten $v_1 = \mathbf{r}_1 \cdot v = u$; $v_2 = \mathbf{r}_2 \cdot v = r v$; $v_3 = \mathbf{r}_3 \cdot v = w$, seine kontravarianten Koordinaten $v^1 = \mathbf{r}^1 \cdot v = u$; $v^2 = \mathbf{r}^2 \cdot v = \frac{v}{r}$; $v^3 = \mathbf{r}^3 \cdot v = w$. Für die Dehnungen in Richtung der Achsen des krummlinigen Systems erhalten wir damit aus Gl. (13) die Werte:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_r &= \frac{\partial v_1}{\partial u^1} = \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial u^2} + r v_1 \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) = \varepsilon_{\varphi}; \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_z &= \frac{\partial v_3}{\partial u^3} = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Winkelausweitungen werden (14):

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_1}{\partial u^2} + \frac{\partial v_2}{\partial u^1} - 2 \sum_{i=1}^3 v_i \Gamma_{12}^i \right] = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right); \\ -\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{32} &= \left[\frac{\partial v_2}{\partial u^3} + \frac{\partial v_3}{\partial v^2} - 2 \sum_{i=1}^3 v_i \Gamma_{23}^i \right] = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \\ -\varepsilon_{13} = -\varepsilon_{31} &= \left[\frac{\partial v_1}{\partial u^3} + \frac{\partial v_3}{\partial u^1} - 2 \sum_{i=1}^3 v_i \Gamma_{13}^i \right] = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned}$$

Wird der Spannungstensor auf die Einheitsvektoren $\mathbf{i}_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$ in der Form $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} \bar{a}^{ik} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_k$ angesetzt, so geht er auf die Achsen \mathbf{r}_k bezogen in $\mathfrak{S} = \sum \bar{a}^{ik} \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$ über, so daß die kontravarianten Komponenten durch $a^{ik} = \frac{\bar{a}^{ik}}{|\mathbf{r}_i| |\mathbf{r}_k|}$ gegeben sind. Setzen wir diese Werte in die Gl. (24) ein, so ergeben sich die bekannten Gleichgewichtsbedingungen für Zylinderkoordinaten; wenn wir noch $\bar{a}^{11} = \sigma_r$; $\bar{a}^{12} = \bar{a}^{21} = \tau_{r\varphi}$; $\bar{a}^{22} = \sigma_\varphi$; $\bar{a}^{31} = \bar{a}^{13} = \tau_{rz}$; $\bar{a}^{32} = \bar{a}^{23} = \tau_{\varphi z}$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \chi_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{\varphi r} + \chi_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \chi_z &= 0. \end{aligned}$$

Der Kraftvektor \mathfrak{K} wurde dabei mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \sum_{i=1}^3 K^i \mathbf{r}_i = \chi_r \mathbf{i}_1 + \chi_\varphi \mathbf{i}_2 + \chi_z \mathbf{i}_3 \\ &= \chi_r \mathbf{r}_1 + \frac{\chi_\varphi}{r} \mathbf{r}_2 + \chi_z \mathbf{r}_3 \end{aligned}$$

angesetzt.

9. Kugelkoordinaten.

Für Kugelkoordinaten gilt $u^1 = r$; $u^2 = \varphi$; $u^3 = \vartheta$, wobei $x^1 = r \sin \varphi \cos \vartheta$; $x^2 = r \sin \varphi \sin \vartheta$; $x^3 = r \cos \varphi$ ist, also der Ortsvektor durch

$$\mathbf{r} = (r \sin \varphi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (r \sin \varphi \sin \vartheta) \mathbf{e}_2 + (r \cos \varphi) \mathbf{e}_3$$

mit $|\mathbf{r}| = r$ gegeben ist und

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (\sin \varphi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (\sin \varphi \sin \vartheta) \mathbf{e}_2 + (\cos \varphi) \mathbf{e}_3; & |\mathbf{r}_1| &= 1; \\ \mathbf{r}_2 &= (r \cos \varphi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (r \cos \varphi \sin \vartheta) \mathbf{e}_2; & |\mathbf{r}_2| &= r; \\ \mathbf{r}_3 &= (-r \sin \varphi \sin \vartheta) \mathbf{e}_1 + (r \sin \varphi \cos \vartheta) \mathbf{e}_2; & |\mathbf{r}_3| &= r \sin \varphi; \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= r^2 \sin \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1; & |\mathbf{r}^1| &= 1; & g^{11} &= 1; & g^{22} &= \frac{1}{r^2}; & g^{33} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}; \\ \mathbf{r}^2 &= \frac{\mathbf{r}_2}{r^2} = \frac{\mathbf{e}_2}{r}; & |\mathbf{r}^2| &= \frac{1}{r^2}; & g^{12} &= g^{13} = g^{23} &= 0; \\ \mathbf{r}^3 &= \frac{\mathbf{r}_3}{r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\mathbf{e}_3}{r \sin \varphi}; & |\mathbf{r}^3| &= \frac{1}{r \sin \varphi}; & g_{11} &= 1; & g_{22} &= r^2; & g_{33} &= r^2 \sin^2 \varphi; \\ & & & & g_{12} &= g_{13} = g_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir den Vektor der Verrückung in bezug auf die Einheitsvektoren $\mathbf{i}_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$ in der Form $\mathbf{v} = u \mathbf{i}_1 + v \mathbf{i}_2 + w \mathbf{i}_3$ an, so erhalten wir für seine kovarianten Kompo-

nenten $v_1 = u$; $v_2 = r \cdot v$; $v_3 = r \sin \varphi w$ und für seine kontravarianten Komponenten $v^1 = u$; $v^2 = \frac{v}{r}$; $v^3 = \frac{w}{r \sin \varphi}$. Damit ergeben Formeln (13), (14) für die Dehnungen und Winkelausweitungen die Werte:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_r = \frac{\partial v_1}{\partial u^1} - \sum_i v_i \Gamma_{11}^i = \frac{\partial v_1}{\partial u^1} = \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial v_2}{\partial u^2} - \sum_i v_i \Gamma_{22}^i \right] = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r v}{\partial u^2} + r v_1 \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right); \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left[\frac{\partial v_3}{\partial u^3} - \sum_i v_i \Gamma_{33}^i \right] = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} (u + c \operatorname{ctg} \varphi); \\ -\varepsilon_{12} &= -\varepsilon_{21} = \frac{2 D_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_1}{\partial u^2} + \frac{\partial v_2}{\partial u^1} - 2 \sum_i v_i \Gamma_{12}^i \right] = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) = \\ &= -\varepsilon_{r\varphi} = -\varepsilon_{\varphi r}; \\ -\varepsilon_{13} &= -\varepsilon_{31} = \frac{2 D_{13}}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial v_1}{\partial u^3} + \frac{\partial v_3}{\partial u^1} - 2 \sum_i v_i \Gamma_{13}^i \right] = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \right. \\ &\quad \left. - w \sin \varphi \right) = -\varepsilon_{r\vartheta}; \\ &= -\varepsilon_{\vartheta r}; \\ -\varepsilon_{23} &= -\varepsilon_{32} = \frac{2 D_{23}}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial v_2}{\partial u^3} + \frac{\partial v_3}{\partial u^2} - 2 \sum_i v_i \Gamma_{23}^i \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - \right. \\ &\quad \left. - w \operatorname{ctg} \varphi \right] = -\varepsilon_{\varphi \vartheta}; \\ &= -\varepsilon_{\vartheta \varphi}. \end{aligned}$$

Wird der Spannungsvektor in bezug auf die Einheitsvektoren $i_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|}$ in der Form $\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^3 \bar{a}^{ik} i_i i_k$ angesetzt, so sind seine kovarianten Komponenten wieder durch $a^{ik} = \frac{\bar{a}^{ik}}{|\mathbf{r}_i| |\mathbf{r}_k|}$ gegeben und es ist:

$$\begin{aligned} a^{11} &= a^{11}; = \sigma_r; \quad a^{12} = \frac{\bar{a}^{12}}{r} = \frac{1}{r} \tau_{r\varphi}; \quad a^{13} = \frac{\bar{a}^{13}}{r \sin \varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \tau_{r\vartheta}; \\ a^{22} &= \frac{\bar{a}^{22}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \sigma_\varphi; \quad a^{23} = \frac{\bar{a}^{23}}{r^2 \sin \varphi} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \tau_{\varphi\vartheta}; \quad a^{33} = \frac{\bar{a}^{33}}{r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \sigma_\vartheta. \end{aligned}$$

Mit $\mathfrak{K} = \chi_r i_1 + \chi_\varphi i_2 + \chi_\vartheta i_3 = \sum_1^3 K^i \mathbf{r}_i$ ergeben die Gl. (24) die Gleichgewichtsbedingungen für die Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r} \sigma_r - \frac{1}{r} (\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta) + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \varphi \tau_{r\varphi} + \chi_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{3}{r} \tau_{r\varphi} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \varphi (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) + \chi_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r} \tau_{r\vartheta} + \frac{2}{r} \operatorname{ctg} \varphi \tau_{\varphi\vartheta} + \chi_\vartheta &= 0. \end{aligned}$$

10. Schiefwinklige Koordinaten.

Es soll der Fall der schiefen Platte betrachtet werden, deren eine Kante auf der Ebene der beiden anderen Kanten senkrecht steht. Die Achsen des schiefwinkligen Systems werden in die Kanten des Parallelepfachs gelegt und auf ein kartesisches

Koordinatensystem mit demselben Ursprung bezogen. Wir haben dann für den Ortsvektor \mathbf{r} zu einem Plattenpunkt: $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i$ bzw. $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 u^i \mathbf{r}_i$ und es ist

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{r}_2 = \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3;$$

$$(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) = \cos \varphi;$$

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{e}_1 - \tan \varphi \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{\cos \varphi} \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{e}_3;$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1; \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad g^{13} = g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0;$$

$$g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}; \quad g^{33} = 1; \quad g_{12} = g_{21} = \sin \varphi; \quad g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0.$$

Setzen wir den Vektor der Verrückung in der Form $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{r}^i$ an, so ergeben die Gl. (17):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial u^1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial u^2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial u^3};$$

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial u^2} + \frac{\partial v_2}{\partial u^1} \right); \quad \varepsilon_{13} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial u^3} + \frac{\partial v_3}{\partial u^1} \right); \quad \varepsilon_{23} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial u^2} + \frac{\partial v_2}{\partial u^3} \right);$$

$$- \varepsilon_{12} = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\frac{\partial v_1}{\partial u^2} + \frac{\partial v_2}{\partial u^1} - \sin \varphi \left(\frac{\partial v_1}{\partial u^1} + \frac{\partial v_2}{\partial u^2} \right) \right].$$

Sind die Koordinaten des Verrückungsvektors in bezug auf die schiefwinkligen Achsen u, v, w , so ist:

$$v_1 = u + \sin \varphi v; \quad v_2 = \sin \varphi u + v; \quad v_3 = w.$$

Damit erhalten wir für die Dehnungen und Winkelausweitungen in Richtung der schiefwinkligen Achsen:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial u^1} + \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial u^1}; \quad \varepsilon_{22} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial u^2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial u^3};$$

$$- \varepsilon_{12} = - \varepsilon_{21} = \cos \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial u^1} \right); \quad - \varepsilon_{13} = - \varepsilon_{31} = \frac{\partial u}{\partial u^3} + \frac{\partial w}{\partial u^1} + \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial u^3};$$

$$- \varepsilon_{23} = - \varepsilon_{32} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial u^3} + \frac{\partial v}{\partial u^3} + \frac{\partial w}{\partial u^2}.$$

Für die Gleichgewichtsbedingungen erhält man, wenn der Spannungstensor in bezug auf die schiefwinkligen Achsen $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a^{ik} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$ gesetzt wird:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} + K^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

(Eingegangen am 22. September 1952.)

Mitteilung aus der Technischen Versuchs- und Forschungsanstalt an der Technischen Hochschule in Wien.

Einzelprüfung von Kupfertafeln auf ihre Eignung zur Herstellung von Fugenblechen.

Von F. K. Müller, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es wurden vergleichende metallographische Untersuchungen sowie Hin- und Herbiegeversuche mit etwa 20 mm breiten Probestreifen von 1 mm dicken Fugenblechen aus Kupfer für Staumauern durchgeführt, von denen ein Großteil zufolge zu hohen Gehaltes an Kupferoxydul (Cu_2O) beim Kaltbiegen mehr oder minder stark kantenrissig war, während andere Cu_2O -freie Bleche der gleichen Lieferung sich rißfrei kaltbiegen ließen. Im vorliegenden

Falle ergab der allerdings nur für Drähte genormte Hin- und Herbiegeversuch nach DIN DVM 1211/1934 (jetzt DIN 51211), in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der metallographischen Untersuchung und dem praktischen Verhalten beim Kaltbiegen, eine sehr einfache und vor allem auch an der Baustelle selbst leicht durchzuführende Erprobung, um ungeeignete Kupferblechtafeln noch vor der Verarbeitung ausscheiden zu können.

Summary. Comparative metallographic investigations were followed by repeated to and fro bending tests, executed on copper strips of 20 mm width and 1 mm thickness, out from sheets intended to serve as sealing means for the joints of retaining and weir dams. A great number of these strips marginally cracked more or less during cold bending in consequence of their contents of cuprous oxide being too high, whilst other strips of the same lot, which were free from cuprous oxide, gave perfect satisfaction. The tests were carried out conformably to the standards for to and fro bending tests on metal wires as per DIN DVM 1211/1934 (at present DIN 51211). The results of the metallographic investigations tallied perfectly with the behaviour of the strips in practical cold bending so that this simple testing method lends itself excellently well for being executed on the building site in view of eliminating the defective copper sheets before use.

Résumé. Des recherches métallurgiques comparatives ont été exécutées, suivies d'essais de pliage de va-et-vient, sur des bandes en cuivre d'une largeur de 20 mm et d'une épaisseur de 1 mm. Ces bandes sont destinées à servir de garnitures pour rendre étanches les joints des murs de barrages en maçonnerie. Après le pliage à froid on constata sur la plupart des bandes des criques marginales, dues à une teneur trop élevée en oxyde cuivreux, tandis que les tôles de la même livraison, exemptes d'oxyde cuivreux, se laissaient plier à froid sans criques. Dans l'occurrence l'essai de pliage de va-et-vient selon la norme DIN DVM 1211/1934 (actuellement DIN 51211) qui — à vrai dire — ne se réfère qu'aux fils métalliques, se trouve en conformité avec le résultat des recherches métallographiques. Il s'agit donc d'un simple essai aisément exécutable à pied d'œuvre qui nous permet de séparer, avant le montage, les tôles en cuivre donnant satisfaction de celles qu'il faut écarter.

Beim Herstellen von Fugenblechen aus 1 mm starken Kupferblechtafeln, die zum Abdichten der Fugen beim Bau von Staumauern verwendet werden, traten an der Baustelle eines großen Elektrizitätswerkes bei einem größeren Prozentsatz der durch Kaltbiegen hergestellten Fugenbleche derartige Mängel auf, daß seitens der Baustelle die gesamte Lieferung als für den beabsichtigten Verwendungszweck ungeeignet abgelehnt wurde.

Die Herstellung derartiger Fugenbleche erfolgt an der Baustelle selbst in der Weise, daß die 2 m langen und 1 m breiten Kupferblechtafeln, um tunlichst lange Fugenbleche zu erhalten, zunächst durch einen Mittellängsschnitt in zwei gleich breite Hälften von 0,5 m zerschnitten werden. Aus jeder Hälfte wird dann ein entsprechend profiliertes Fugenblech durch rechtwinkeliges Biegen (Kaltbiegen bei Raumtemperatur) auf der Biegemaschine hergestellt, wobei alle Biegekanten in die Längsrichtung des Bleches zu liegen kommen. Die Biegekanten stimmen demnach mit der Walzrichtung der Kupferblechtafel überein. Die so hergestellten Kupferbleche müssen naturgemäß vollkommen dicht und rißfrei sein, dürfen also insbesondere an den verhältnismäßig scharfwinkelig abgebogenen Biegekanten keinerlei Kantenanrisse bzw. völlige Kantendurchrisse oder andere gefährliche Oberflächenanrisse zufolge beim Kaltbiegen sich öffnender Blechüberwalzungen, Blechdopplungen u. dgl. aufweisen, die selbstverständlich dann das Fugenblech zum Ausschluß machen würden. Bei den bisher bezogenen Kupferblechlieferungen waren auch nie derartige, die Verwendbarkeit der aus diesen hergestellten Fugenbleche grundsätzlich beeinträchtigende Mängel aufgetreten.

Bei der letzten größeren Kupferblechlieferung jedoch, die mit Rücksicht auf die derzeitige schwierige Beschaffungsmöglichkeit dieser Mangelware und die Dringlichkeit für das planmäßige Fortschreiten der Baustellenarbeiten von einer anderen Lieferfirma bezogen werden mußte, traten nun bei einem recht nennenswerten Prozentsatz der aus den Tafeln hergestellten Fugenbleche entweder an einzelnen oder auch an allen Biegekanten dieser Fugenbleche sowohl Kantenanrisse als auch vielfach völlige

Biegekantendurchrisse geringer bis sehr großer Länge sowie vereinzelt auch mehr oder minder tiefgehende, durch Blechdopplungsstellen verursachte Oberflächenanrisse auf. Hingegen ließen sich andere, dem Anschein nach völlig gleich aussehende Kupferblechtafeln dieser Lieferung von derselben Baustelle unter völlig gleichen Verarbeitungsbedingungen zu fehlerfreien, dichten Fugenblechen anstandslos verarbeiten. Da somit ohne weitere Erprobung und nur allein durch vorherige Besichtigung der gelieferten Kupferblechtafeln seitens der Baustelle keine Entscheidung über die Verwendbarkeit derselben für die Herstellung von Fugenblechen getroffen und die

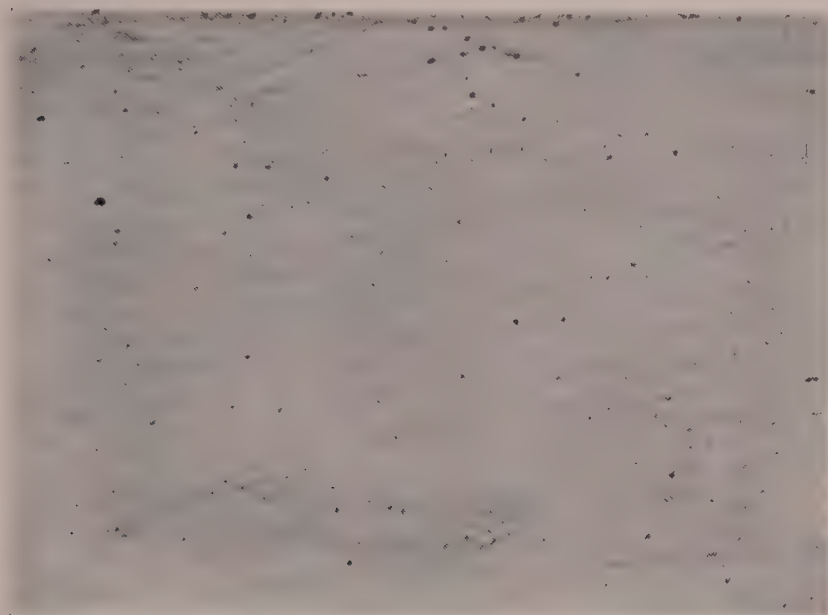


Abb. 1. Schliffbild eines beim Kaltbiegen völlig rißfrei gebliebenen Fugenbleches (Nr. 21 von Zahlentafel 1). Metallographischer Befund 1 a: Querschlifffläche praktisch frei von Kupferoxyd-einschlüssen.

ungeeigneten nicht im vorhinein ausgeschieden werden konnten, wurde zunächst die gesamte Lieferung von ihr abgelehnt.

Umfangreiche, vergleichend an der Technischen Versuchs- und Forschungsanstalt der Technischen Hochschule in Wien durchgeführte metallographische Gefügeuntersuchungen an Querschliffen von Fugenblechen dieser Lieferung, die vollkommen rißfrei an der Baustelle durch Kaltbiegen sich herstellen ließen, sowie von beim Kaltbiegen besonders stark durchgerissenen Fugenblechen, bestätigten einwandfrei unsere Vermutung, daß die Kantenrissigkeit der kaltbrüchigen Kupferbleche insbesondere durch zu hohen Sauerstoffgehalt in Form von nichtmetallischen Kupferoxyd- (Cu_2O -) Einschlüssen verursacht worden ist. Ein Vergleich der Abb. 1 und 2 veranschaulicht dies besonders deutlich. Abb. 1 zeigt bei 300facher linearer Vergrößerung das Schliffbild des polierten, ungeätzten Querschliffes eines der Fugenbleche, die sich einwandfrei rißfrei an der Baustelle durch Kaltbiegen herstellen ließen. Das Kupfer ist praktisch frei von Kupferoxyd-einschlüssen. Alle untersuchten rißfreien Fugenbleche zeigen zumeist ein gleiches, kupferoxydfreies Gefüge oder es sind allenfalls nur sehr wenige Cu_2O -Einschlüsse von zum Teil etwas größerer Ausbildung vorhanden. Dagegen zeigt Abb. 2 bei gleicher 300facher linearer Vergrößerung das Schliffbild des polierten, ungeätzten Querschliffes eines beim Kaltbiegen besonders

stark kantenrissigen Fugenbleches, welches außergewöhnlich zahlreiche, sehr feine, nichtmetallische Kupferoxyd-einschlüsse in ziemlich gleichmäßiger Verteilung aufweist, die im Schliffbilde als dunkle Punkte erkenntlich sind. Ein gleiches beziehungsweise sehr ähnliches Schliffbild mit sehr vielen, feinen Einschlüssen von Kupferoxyd-schlacken wiesen auch die Querschliffe aller übrigen mehr oder minder stark kantenrissigen Fugenbleche bei der metallographischen Untersuchung auf.

Bekanntlich sind kleine Gehalte an Kupferoxydul von 0.5 bis 1.0% Cu_2O (entsprechend 0.05 bis 0.11% O_2), wie sie in jedem technischen Kupfer vorkommen, ohne

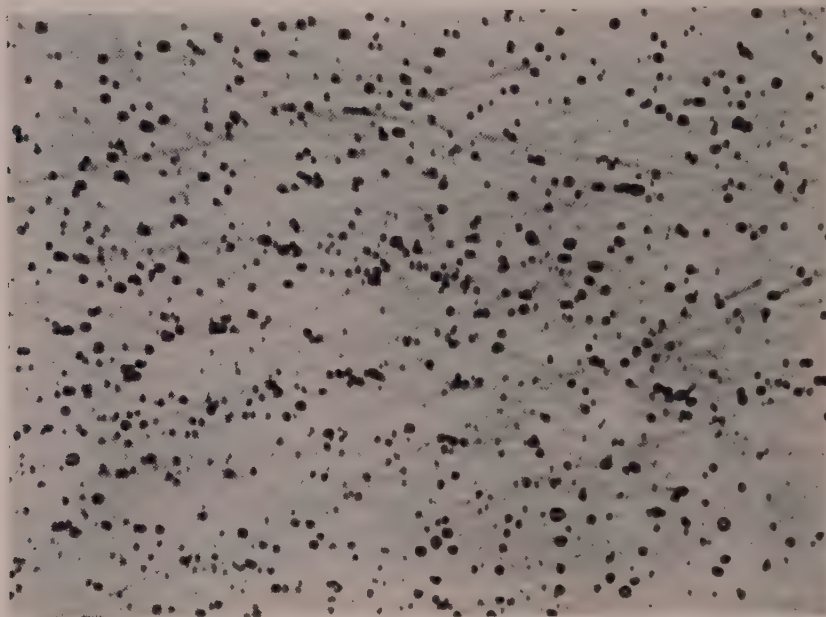


Abb. 2. Schliffbild eines stark kantenrissigen Fugenbleches (Nr. 15 von Zahlentafel 1). Metallographischer Befund 2 c: Querschlifffläche weist überaus zahlreiche, feine Kupferoxyd-einschlüsse auf, Sauerstoffgehalt daher weit über 0,1% O_2 .

wesentlichen Einfluß auf die Festigkeitseigenschaften von Kupfer. Ja, sie werden in diesen Mengen im Kupfer vielfach sogar gerne gesehen, da sie schädliche Beimengungen, wie z. B. das versprödennde Wismut, in die weniger schädliche Oxydform überführen. Höhere Kupferoxydulgehalte wirken jedoch sehr versprödennd und beeinträchtigen erheblich die Formänderungseigenschaften, Dehnung, Einschnürung, Biege- und Verwindungszahl von Kupfer.

Wenn nun auch durch die metallographische Gefügeuntersuchung jeder einzelnen Kupfertafel sicherlich eine Entscheidung über deren Verwendbarkeit für Herstellung von Gefügeblechen getroffen werden kann, so erscheinen solche Untersuchungen durch die Baustelle wohl schwer durchführbar, wenn nicht gänzlich undurchführbar. Es war jedoch nach ausführlicher vergleichender Erprobung in unserer Versuchsanstalt möglich, im Hin- und Herbiegeversuch ein wesentlich einfacheres und vor allem auch an der Baustelle selbst leicht durchführbares Prüfverfahren zu finden, das eine einwandfreie Vorentscheidung der Verwendbarkeit der einzelnen Kupferblechtafeln, insbesondere im vorliegenden Verwendungsfalle, gestattet.

Zu diesem Zwecke wurden mit den bereits metallographisch untersuchten Fugenblechen unter tunlichster Annäherung an den Hin- und Herbiegeversuch nach DIN DVM 1211/1934 (jetzt DIN 51 211), der allerdings nur bei Prüfung von Drähten normen-

mäßig vorgeschrieben ist, vergleichende Hin- und Herbiegeversuche mit herausgeschnittenen rechteckigen Blechstreifen von 20 mm Breite durchgeführt. Die 1 mm dicken Blechstreifen wurden an einem Ende zwischen zwei Spannbacken (von $r = 2$ mm Kantenabrundung, das ist 4 mm Durchmesser der Biegezyylinder) festgeklemmt, während das andere Streifenende der geschlitzte Mitnehmer des Biegehebels umfaßte. Der Probe- streifen wurde dann durch Umlegen des Biege- hebels abwechselnd nach der einen und ande- ren Seite um 90° aus der Ausgangsmittellage und Wiederrückbringen in diese so lange hin- und hergebogen, bis der erste Anriß bzw. der Bruch eintrat. Hierbei lag selbstverständ- lich die Biegekante des Blechstreifens in der gleichen Richtung, wie dies bei den Biege- kanten des Fugenbleches gegenüber der Längsrichtung (Walzrichtung) der Blechtafel der Fall ist.

Die Zählung der ertragenen Hin- und Her- biegungen n erfolgt in Anlehnung an DIN 51 211 in der Weise, daß die erste Biegung um 90° aus der Mittellage mit $n = 1/2$ gezählt wird, das erste Wiederrückbiegen in die Aus- gangsmittellage zählt als $n = 1$, das Weiter- biegen um 90° aus der Mittellage (also in ent- gegengesetzter Richtung wie das erste Ab- biegen) wird als $n = 1 1/2$ gezählt, das erneute Zurückbiegen in die Ausgangsmittellage zählt als $n = 2$ usw. fort, bis ein Anriß bzw. der Bruch eintritt.

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Hin- und Herbiegeversuche an 26 Probe- streifen von Fugenblechen in Spalte 2 und 3 eingetragen. Außerdem sind in Spalte 4 die zugehörigen Befunde der metallographischen Gefügeuntersuchung der polierten Querschliffe dieser Probestreifen eingetragen. Hierbei bedeutet:

Befund 1 a: Schlifffläche praktisch frei von Cu_2O -Einschlüssen (vgl. Abb. 1);

„ 1 b: sehr wenig, feinere Cu_2O -Einschlüsse;

„ 1 c: wenig, feinere Cu_2O -Einschlüsse;

„ 1 d: wenig, etwas größere Cu_2O -Einschlüsse;

„ 2 a: viele, feine Cu_2O -Einschlüsse;

„ 2 b: sehr viele, feine Cu_2O -Einschlüsse;

„ 2 c: überaus viele, feine Cu_2O -Einschlüsse (vgl. Abb. 2).

Durch diese vergleichende Untersuchung im Hin- und Herbiegeversuch und die metallographische Untersuchung von Querschliffen auf Menge und Verteilung der Kupferoxyd-Einschlüsse konnte bei den untersuchten Fugenblechen (aus 1 mm dicken Kupferblechen) nachgewiesen werden, daß Bleche, die beim Kaltbiegen der Kanten aufrissen, immer außerordentlich reich an mehr oder minder feinen Kupfer-

Tabelle 1. Ergebnisse der Hin- und Herbiegeversuche über einen Biege- dorn von 4 mm Durchmesser und der metallographischen Gefügeunter- suchung der polierten Fugenblech- querschliffe.

Nummer der Probe	Ertragene Hin- und Herbiegezahlen		Befund der metallo- graphischen Gefüge- untersuchung
	beim 1. Anriß	bei Bruch	
1	$3 1/2$	$3 3/4$	1 b
2	$1 1/2$	2	2 a
3	$4 1/2$	5	1 a
4	2	$2 1/2$	2 a
5	$4 1/2$	5	1 a
6	$3 1/2$	5	1 b
7 ¹	—	$1 1/4$ ¹	2 c
8	$4 1/2$	5	1 a
9	$4 1/4$	$4 1/2$	1 a
10	3	$3 1/4$	1 c
11	$2 1/2$	3	1 c
12	$3 1/2$	4	1 b
13	$1 1/4$	$1 1/2$	2 b
14	$3 1/4$	$3 1/2$	1 c
15	1	$1 1/4$	2 c
16	$3 1/2$	4	1 c
17 ¹	—	$2 1/2$ ¹	2 a
18	3	$3 1/4$	1 c
19	$3 1/2$	$4 1/4$	1 a
20	3	$3 1/4$	1 b
21	4	$4 1/2$	1 a
22	3	$3 1/2$	1 c
23	6	$6 1/2$	1 d
24	$5 1/2$	$6 1/2$	1 d
25	5	$5 1/2$	1 d
26	5	$5 1/2$	1 d

¹ Ohne vorherigen Anriß plötzlich gebrochen.

oxyduleinschlüssen waren und gleichzeitig beim Hin- und Herbiegeversuch über Biegedorne von 4 mm Durchmesser nur geringe Biegezahlen (unter $n = 2^{1/2}$) bis Eintritt des Bruches ertrugen. Je freier von Cu_2O -Einschlüssen im allgemeinen die Bleche waren, um so größer waren auch die erreichten Biegezahlen des angeführten Hin- und Herbiegeversuches, ehe Anriß oder Bruch eintrat, und um so besser erwies sich auch im vorliegenden Falle ihre Eignung zur Herstellung einwandfreier Fugenbleche durch Kaltbiegen der Kanten.

(Eingegangen am 7. Oktober 1952.)

Die Frequenzgleichung der Biegungsschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit einer Punktmasse und gleichförmiger Auflast.

Von K. Federhofer, Graz.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Mit Benutzung bereits tabulierter Hilfsfunktionen wird die Frequenzgleichung der Biegungsschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit gleichförmiger Auflast und einer Punktmasse in einer für die numerische Lösung bequemen Form dargestellt. Der Grenzübergang zu den Sonderfällen des zweifach gestützten Trägers und des an einem Ende eingespannten, am anderen Ende gestützten Trägers mit Punktmasse ermöglicht die Beurteilung des Gütegrades der nach bekannten Näherungsverfahren gerechneten Grundschwingzahlen solcher Träger.

Summary. The frequency equation of the bending oscillations of a beam supported at three points with uniformly distributed load and with a concentrated mass in one point is presented in a shape facilitating the numerical solution whereby already tabulated auxiliary functions are employed. The limit transition to the special cases of the beam supported at two points and to the beam fixed at one end and supported at the other with the mass concentrated in one point renders possible to judge of the quality and convenience of the basic oscillation values of such beams as calculated according to the well-known methods of approximation.

Résumé. L'équation de fréquence des oscillations de flexion d'une poutre à triple appui à charge distribuée uniformément et à masse concentrée en un point est présentée sous une forme facilitant la solution numérique à l'aide de fonctions auxiliaires déjà disponibles en forme de tableaux. La transition-limite aux cas spéciaux de la poutre à double appui et de la poutre encastrée à une extrémité et appuyée à l'autre avec concentration de sa masse en un point permet de se rendre compte de la qualité plus ou moins appropriée des valeurs d'oscillation de base de ces poutres calculées selon la méthode bien connue d'approximation.

Einleitung.

Bei gleichbleibendem Querschnitte F und Trägheitsmomente J des Trägers von der Gesamtlänge L , die durch eine Zwischenstütze in die Feldweiten l_1, l_2 unterteilt ist, lautet die Frequenzgleichung der elastischen Querschwingungen

$$\text{ctg } \lambda_1 - \text{ctg } \lambda_1 = -(\text{ctg } \lambda_2 - \text{ctg } \lambda_2).$$

Die Trägerenden sind frei aufliegend, $\lambda_1 = \kappa l_1, \lambda_2 = \kappa l_2$ bedeuten unbenannte Zahlen, wobei die Unbekannte κ (Dimension m^{-1}) definiert ist durch

$$\kappa^4 = \frac{\mu F (1 + \delta)}{E J} \omega^2.$$

Hierin bezeichnet ω die Kreisfrequenz, μF die Eigenmasse des Trägers je Längeneinheit, zu der noch eine über die Stablänge $L = l_1 + l_2$ gleichmäßig verteilte Auflast treten kann, die das δ -fache der Eigenmasse ausmacht; E ist das Elastizitätsmaß des Trägermaterials.

Die den Lagen der Zwischenstütze in den aufeinanderfolgenden Zehnteln der Gesamtstützweite L entsprechenden kleinsten Wurzeln λ_1, λ_2 obiger transzendenten

Gleichung sind in meiner unten angeführten Arbeit zusammengestellt¹. Dort sind auch noch weitere Fälle der Lagerung der Trägerenden numerisch erledigt, nämlich daß eines oder beide Enden des Trägers eingespannt seien. Ist aber eines der beiden Trägerfelder noch mit einer Punktmasse M_1 besetzt, so bedient man sich zur genäherten Berechnung der Grundschwingzahl eines solchen Trägers der Formel von S. Dunkerley² [Gl. (14), S. 30].

Im folgenden zeige ich, daß sich für den dreifach gestützten Träger, der neben einer gleichförmigen Auflast auch eine Punktmasse trägt, die Frequenzgleichung in sehr übersichtlicher und für die numerische Lösung geeigneter Form darstellen läßt; als Grenzfälle ergeben sich daraus unmittelbar auch die bisher meines Wissens nicht entwickelten Frequenzgleichungen für den zweifach gestützten Träger und für den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende gestützten Träger mit Punktmasse, für die auch numerische Ergebnisse mitgeteilt werden.

1. Die Frequenzgleichung.

Für jedes der drei Felder l_1, a, b (Abb. 1), in die die Trägerlänge L durch die Zwischenstütze und Lastenangriffsstelle geteilt wird, besteht eine Eigenfunktion $z(x)$ von der Form

$$z_r = a_r \cos \kappa x + b_r \cos \kappa x + c_r \sin \kappa x + d_r \sin \kappa x \quad (r = 1, 2, 3),$$

wobei die Abszissen x jeweils vom linken Ende des betreffenden Feldes r gezählt werden sollen. Für die $3 \times 4 = 12$ Integrationskonstanten lassen sich ebensoviele Bedingungen (Auflager- und Übergangsbedingungen) angeben, die sich in zwölf homogenen Gleichungen ausdrücken. Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems liefert die gesuchte Frequenzgleichung. Durch passende Zusammenfassung der einzelnen Gleichungen lassen sich diese auf zwei Gleichungen für die Konstanten a_3, b_3 reduzieren, woraus die Frequenzgleichung entwickelt werden kann.

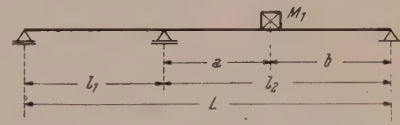


Abb. 1. Dreifach gestützter Träger mit einer Punktmasse M_1 .

Im folgenden bedeutet

$$\lambda_1 = \kappa l_1, \quad \lambda_a = \kappa a, \quad \lambda_b = \kappa b, \\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_a + \lambda_b = \kappa L.$$

Die Gesamtmasse des Trägers einschließlich einer δ -fachen gleichförmigen Auflast beträgt $M_0 = \mu (1 + \delta) F L$ jene der Punktmasse M_1 ; es sei gesetzt $\varepsilon = \frac{M_1}{M_0}$. Hiermit wird $\varepsilon \lambda = \frac{M_1}{M_0} \kappa L = \frac{M_1 \kappa}{\mu F (1 + \delta)}$ unabhängig von L .

1. Feld. Die Lagerbedingungen $z = 0, z'' = 0$ am linken gestützten Ende ($x = 0$) liefern

$$a_1 = 0, \quad (1)$$

$$b_1 = 0, \quad (2)$$

so daß

$$z(x) = c_1 \sin \kappa x + d_1 \sin \kappa x.$$

Hiermit folgt für das rechte Feldende ($x = l_1$):

$$z_{x=l_1} = c_1 \sin \lambda_1 + d_1 \sin \lambda_1 = 0. \quad (3)$$

¹ K. Federhofer: Bautechn. H. 47, 647 (1933).

² Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 185, 279 (1894).

2. Feld. Die Lagerbedingung $z = 0$ für $x = 0$ verlangt

$$a_2 + b_2 = 0. \quad (4)$$

Den Übergangsbedingungen gleicher Neigung der Biegelinien und gleicher Biegemomente an der Zwischenstütze entsprechen die Gleichungen

$$c_1 \cos \lambda_1 + d_1 \mathfrak{Cof} \lambda_1 = c_2 + d_2, \quad (5)$$

$$-c_1 \sin \lambda_1 + d_1 \mathfrak{Sin} \lambda_1 = -a_2 + b_2. \quad (6)$$

Beim Übergang vom zweiten zum dritten Felde bestehen die Bedingungen der Gleichheit der Einsenkung, der Neigung der Biegelinie und des Biegemomentes; hingegen macht die Querkraft $Q = -EJ z'''$ infolge der dort wirkenden Trägheitskraft

$$T = M_1 z \cdot \omega^2 \\ x = 0 \text{ (3. F.)}$$

einen Sprung gemäß

$$Q_2 - Q_3 - T = 0.$$

Damit entstehen folgende Gleichungen:

$$a_2 \cos \lambda_a + b_2 \mathfrak{Cof} \lambda_a + c_2 \sin \lambda_a + d_2 \mathfrak{Sin} \lambda_a = a_3 + b_3, \quad (7)$$

$$-a_2 \sin \lambda_a + b_2 \mathfrak{Sin} \lambda_a + c_2 \cos \lambda_a + d_2 \mathfrak{Cof} \lambda_a = c_3 + d_3, \quad (8)$$

$$-a_2 \cos \lambda_a + b_2 \mathfrak{Cof} \lambda_a - c_2 \sin \lambda_a + d_2 \mathfrak{Sin} \lambda_a = -a_3 + b_3, \quad (9)$$

$$(a_2 \sin \lambda_a + b_2 \mathfrak{Sin} \lambda_a - c_2 \cos \lambda_a + d_2 \mathfrak{Cof} \lambda_a) - (-c_3 + d_3) + \frac{M_1 \omega^2}{EJ \kappa^3} (a_3 + b_3) = 0. \quad (10)$$

3. Feld. Die Lagerbedingungen $z = 0$, $z'' = 0$ am rechten gestützten Ende des dritten Feldes ergeben

$$a_3 \cos \lambda_b + b_3 \mathfrak{Cof} \lambda_b + c_3 \sin \lambda_b + d_3 \mathfrak{Sin} \lambda_b = 0, \quad (11)$$

$$-a_3 \cos \lambda_b + b_3 \mathfrak{Cof} \lambda_b - c_3 \sin \lambda_b + d_3 \mathfrak{Sin} \lambda_b = 0. \quad (12)$$

Der Eliminationsvorgang verläuft wie folgt:

Aus (3) + (5) und (3) - (5) ergibt sich mit den Abkürzungen:

$$\mathfrak{Sin} \lambda_a = \mathfrak{S}_a, \quad \sin \lambda_a = s_a, \dots$$

$$c_1 = \frac{(c_2 + d_2) \mathfrak{S}_a}{\mathfrak{S}_a c_a - \mathfrak{C}_a s_a}, \quad d_1 = -\frac{(c_2 + d_2) s_a}{\mathfrak{S}_a c_a - \mathfrak{C}_a s_a}.$$

Hiermit geht (6) bei Beachtung von (4) über in

$$c_2 + d_2 = -2 a_2 \lambda_1 \varphi_1, \quad (a)$$

wobei abkürzend mit φ_1 die Funktion

$$\varphi(\lambda_1) = \frac{1}{2 \lambda_1} (\mathfrak{Ctg} \lambda_1 - \text{ctg} \lambda_1)$$

bezeichnet ist, die aus Tabellen³ zu entnehmen ist.

Aus (7) + (9) und (7) - (9) folgt wegen (4):

$$c_2 = -a_2 \text{ctg} \lambda_a + \frac{a_3}{s_a}, \dots \quad (b) \quad d_2 = a_2 \mathfrak{Ctg} \lambda_a + \frac{b_3}{\mathfrak{S}_a} \quad (c)$$

und dies eingesetzt in (a):

$$a_2 = -\frac{1}{2 (\varphi_1 \lambda_1 + \varphi_a \lambda_a)} \left(\frac{a_3}{s_a} + \frac{b_3}{\mathfrak{S}_a} \right). \quad (d)$$

Mit (b) und (c) ergibt sich aus (8)

$$a_2 (\mathfrak{Cof} \lambda_a - \text{cosec} \lambda_a) + (a_3 \text{ctg} \lambda_a + b_3 \mathfrak{Ctg} \lambda_a) = c_3 + d_3,$$

oder mit Einführung der tabulierten Funktion³

$$\psi_a \equiv \psi(\lambda_a) = -\frac{1}{2\lambda_a} (\operatorname{Cosec} \lambda_a - \operatorname{cosec} \lambda_a)$$

und Benutzung von (d):

$$a_3 \left[\operatorname{ctg} \lambda_a + \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \cdot \frac{1}{s_a} \right] + b_3 \left[\operatorname{Ctg} \lambda_a + \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \cdot \frac{1}{\mathfrak{S}_a} \right] - (c_3 + d_3) = 0.$$

Aus (11) + (12) und (11) - (12) folgt aber

$$c_3 = -a_3 \operatorname{ctg} \lambda_b, \quad d_3 = -b_3 \operatorname{Ctg} \lambda_b, \quad (e)$$

womit die vorstehende Gleichung in die nur a_3, b_3 enthaltende Beziehung übergeht:

$$a_3 \left[(\operatorname{ctg} \lambda_a + \operatorname{ctg} \lambda_b) + \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \cdot \frac{1}{s_a} \right] + b_3 \left[(\operatorname{Ctg} \lambda_a + \operatorname{Ctg} \lambda_b) + \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \cdot \frac{1}{\mathfrak{S}_a} \right] = 0. \quad (A)$$

Die zweite Gleichung, die nur a_3, b_3 enthält, entsteht unmittelbar aus (10) bei Verwertung der Gl. (a) bis (e): der Faktor $\frac{M_1 \omega^2}{EJ \kappa^3}$ kann wegen $\kappa^4 = \frac{\mu F (1 + \delta) \omega^2}{EJ}$ ersetzt werden durch $\frac{M_1 \kappa}{\mu F (1 + \delta)}$ oder durch $\varepsilon \lambda$ (vgl. oben).

Mit Einführung der tabulierten Funktion³

$$\bar{\psi}_a \equiv \bar{\psi}(\lambda_a) = \frac{\lambda_a}{2} (\operatorname{Cosec} \lambda_a + \operatorname{cosec} \lambda_a)$$

folgt

$$a_3 \left[(\operatorname{ctg} \lambda_a + \operatorname{ctg} \lambda_b) + \frac{\bar{\psi}_a}{\lambda_a (\varphi_1 \lambda_1 + \varphi_a \lambda_a)} \cdot \frac{1}{s_a} - \varepsilon \lambda \right] - b_3 \left[(\operatorname{Ctg} \lambda_a + \operatorname{Ctg} \lambda_b) - \frac{\bar{\psi}_a}{\lambda_a (\varphi_1 \lambda_1 + \varphi_a \lambda_a)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{S}_a} + \varepsilon \lambda \right] = 0. \quad (B)$$

Abkürzend sei gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda_a + \operatorname{ctg} \lambda_b &= m, \\ \operatorname{Ctg} \lambda_a + \operatorname{Ctg} \lambda_b &= n. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Die Entwicklung der Koeffizientendeterminante der Gl. (A), (B) liefert dann die Frequenzgleichung

$$2mn + (m - n)\varepsilon\lambda + \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \left(\frac{n}{s_a} + \frac{m}{\mathfrak{S}_a} \right) + \frac{\bar{\psi}_a}{\lambda_a (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a)} \left(\frac{n}{s_a} - \frac{m}{\mathfrak{S}_a} \right) + \varepsilon \lambda \frac{\lambda_a \psi_a}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \left(\frac{1}{s_a} - \frac{1}{\mathfrak{S}_a} \right) = 0,$$

oder nach Eintragung der den Funktionen $\psi_a, \bar{\psi}_a$ zukommenden Ausdrücke schließlich

$$\frac{2mn + (m - n)\varepsilon\lambda + \frac{1}{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_a \varphi_a} \left[\left(n + \frac{\varepsilon\lambda}{2} \right) \operatorname{cosec}^2 \lambda_a - \left(m - \frac{\varepsilon\lambda}{2} \right) \operatorname{Cosec}^2 \lambda_a - \varepsilon\lambda \operatorname{cosec} \lambda_a \operatorname{Cosec} \lambda_a \right]}{ } = 0. \quad (13)$$

Bei Aufsuchung der die Grundfrequenz liefernden kleinsten Wurzel dieser transzendenten Gleichung wird man die vier Argumente $\lambda, \lambda_1, \lambda_a, \lambda_b$ auf ein Grundargument, z. B. λ_a , beziehen, so daß dann $\lambda_b = \frac{b}{a} \lambda_a$, $\lambda_1 = \frac{l_1}{a} \lambda_a$ und $\lambda = \frac{L}{a} \lambda_a$ zu setzen ist.

Sei ω_e die Kreisfrequenz des dreifach gestützten Trägers ohne Einzelmasse, die aus der eingangs angeführten Tabelle zu entnehmen ist, ω_1 jene Kreisfrequenz, die

³ S. Gradstein und W. Prager: Ingenieur-Arch. 2, 647 (1931). — Vgl. auch H. Hohenemser und W. Prager: Dynamik der Stabwerke, S. 355. Berlin: Springer-Verlag. 1933.

dem nur mit der Punktmasse M_1 belasteten Träger entspricht, dann gilt für die gesuchte Grundfrequenz ω nach S. Dunkerley² genähert:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_e^2} + \frac{1}{\omega_1^2}. \quad (14)$$

Da $\omega_1^2 = \frac{\delta_{\text{stat}}}{g}$, worin δ_{stat} die statische Durchbiegung des Trägers an der Stelle der Last $M_1 g$ ist, so wird

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{M_1 a^2 b^2}{12 E J l_2^3 L} [4 l_2 (l_1 + a) - a^2].$$

Ausgehend von dem aus Gl. (14) berechneten Näherungswert für ω kann dann die schärfere Bestimmung der kleinsten Wurzel der Frequenzgleichung (13) erfolgen.

Beispiel. Der Träger habe die Länge $L = 7.5$ m, $l_1 = l_2 = 3.75$ m, $a = 2.35$ m, $b = 1.40$ m und bestehe aus 2] [No 18; er sei mit einem Motor vom Gewichte $M_1 g = 1000$ kg belastet.

Dann ist $\varepsilon = \frac{M_1}{M_0} = 3.055$ und $J = 2708 \text{ cm}^4$, $F = 56 \text{ cm}^2$. Mit $\delta = 0$ wird aus $\kappa^4 = \frac{\mu F \omega^2}{E J}$: $\kappa = \frac{0.5355}{10^3} \sqrt{\omega}$.

Die Formel (14) liefert dann den Näherungswert $\omega = 81 [\text{sec}^{-1}]$. Hiermit lassen sich die Koeffizienten der beiden Gl. (A), (B) berechnen; man erhält

$$1.92697 a_3 + 3.0685 b_3 = 0, \quad (\text{Gl. A})$$

$$8.334 a_3 + 13.3293 b_3 = 0. \quad (\text{Gl. B})$$

Die Koeffizientendeterminante hat demnach den Wert $\Delta = +0.1$, anstatt 0.

Die Wiederholung dieser Rechnung mit der Annahme $\omega = 85$ führt zu dem Gleichungspaar

$$1.84554 a_3 + 3.0168 b_3 = 0,$$

$$8.7529 a_3 + 13.6165 b_3 = 0,$$

mit der Determinante $\Delta = -1.26$.

Damit ist die kleinste Wurzel der Frequenzgleichung zwischen $\omega = 81$ und 85 eingegabelt und man erhält bei linearer Interpolation $\omega = 81.3 (\text{s}^{-1})$. Abnehmendes Massenverhältnis $\varepsilon = \frac{M_1}{M_0}$ hat natürlich beträchtliches Ansteigen der Kreisfrequenz ω zur Folge. Es ergibt sich z. B. mit $\varepsilon = 1$: $\omega = 130.583 (\text{s}^{-1})$; die Koeffizientendeterminante der Gl. (A), (B) beträgt dann $\Delta = +0.00002$; genähert nach Gl. (14): $\omega = 129.1 (\text{s}^{-1})$; mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\omega = 165.680 (\text{s}^{-1})$ ($\Delta = -0.00004$); genähert nach Gl. (14): $\omega = 163.6 (\text{s}^{-1})$. In allen drei Fällen erweist sich die Näherungsformel (14) als sehr brauchbar.

2. Zwei Grenzfälle.

a) Der dreifach gelagerte Träger geht, indem die Feldweite l_1 gegen Unendlich strebt, in den an beiden Enden frei aufliegenden Träger von der Stützweite $l = a + b$ mit Punktmasse M_1 über. Dann vereinfacht sich die Frequenzgleichung (13) erheblich; sie wird

$$2 m n + (m - n) \varepsilon \lambda = 0. \quad (15)$$

Hierin hat $\varepsilon \lambda$ — obgleich $\lambda = \lambda_1 + \lambda_a + \lambda_b$ mit $l_1 \rightarrow \infty$ gegen ∞ geht — den endlichen Wert $\frac{M_1 \kappa}{\mu F (1 + \delta)}$. Erweitert man Zähler und Nenner mit $l = a + b$, so entsteht wegen $M_0 = \mu F (1 + \delta) l$ und mit $\kappa l = \lambda$ wieder $\varepsilon \lambda$, wobei aber λ jetzt die Bedeutung $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ hat.

Zur Auflösung von (15) sei gesetzt $a = \alpha l$, $b = \beta l$, womit

$$\lambda_a = \alpha a = \alpha \lambda,$$

$$\lambda_b = \beta b = \beta \lambda,$$

wegen $\alpha + \beta = 1$ gilt $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$.

Tabelle 1. Werte λ , gerechnet aus (15), nach Morrow (M) und nach Dunkerley (D).

	$\alpha = \frac{a}{l}$	$\varepsilon = M_1/M_0$					für $\varepsilon = 0$ ist
		$\frac{1}{4}$	1	2	5	10	
Aus Gl. (15) ..		3·0826	2·9345	2·767	2·448	2·14	$\lambda = \pi$
M	0·125	3·0826	2·9363				
D	($\frac{1}{8}$)	3·071	2·895	2·72	2·398	2·112	
Aus Gl. (15) ..		2·967	2·6177	2·3503	1·96104	1·6792	$\lambda = \pi$
M	0·25	2·970	2·6333				
D	($\frac{1}{4}$)	2·951	2·597	2·334	1·952	1·71	
Aus Gl. (15) ..		2·838	2·3821	2·0947	1·72035	1·4638	$\lambda = \pi$
M	0·5	2·821	2·3668				
D	($\frac{1}{2}$)	2·835	2·381	2·095	1·72	1·462	

Mit λ ist die sekundliche Schwingzahl $n_s = \frac{\omega}{2\pi}$ bestimmt durch

$$n_s = \frac{\lambda^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu F(1+\delta)}}.$$

Die Ermittlung der kleinsten Wurzeln λ der Gl. (15) für verschiedene Annahmen von ε und α ermöglicht die Beurteilung der Güte jener Näherungswerte, die sich nach dem Verfahren von J. Morrow⁴ und nach der Formel von Dunkerley ergeben. Tab. 1 enthält die Näherungswerte λ nebst den aus (15) gerechneten genauen Wurzeln.

b) Mit $l_1 = 0$ geht der dreifach gelagerte Träger in den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende frei aufliegenden Träger mit der Stützweite $l = a + b$ über, der neben der verteilten Masse M_0 noch mit der Punktmasse M_1 belastet ist.

Da

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \varphi_1 = \lim_{\lambda_1=0} \frac{1}{2} (\mathfrak{C}tg \lambda_1 - \mathfrak{c}tg \lambda_1) = 0,$$

so folgt für diesen Träger mit statisch unbestimmter Lagerung die Frequenzgleichung

$$2mn + (m-n)\varepsilon\lambda + \frac{1}{\varphi_a \lambda_a} \left[\frac{n + \frac{\varepsilon\lambda}{2}}{s_a^2} - \frac{m - \frac{\varepsilon\lambda}{2}}{\mathfrak{S}_a^2} - \frac{\varepsilon\lambda}{s_a \mathfrak{S}_a} \right] = 0, \quad (16)$$

worin wegen $l_1 = 0$: $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ zu setzen ist.

Zur Berechnung eines Näherungswertes für die kleinste Kreisfrequenz ω steht die Gl. (14) zur Verfügung; der Wert von ω_e ist unmittelbar aus der angeführten Tabelle 1 zu entnehmen und ω_1 berechnet sich aus

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{M_1 a^3 b^2 (3l + b)}{12 EJ l^3}.$$

Bei fehlender Punktmasse, also $\varepsilon = 0$ geht Gl. (16) zunächst über in

$$mn + \frac{1}{\mathfrak{C}tg \lambda_a - \mathfrak{c}tg \lambda_a} \left(\frac{n}{s_a^2} - \frac{m}{\mathfrak{S}_a^2} \right) = 0. \quad (17)$$

⁴ J. Morrow: Phil. Mag. J. Sci. (6) 11, 354–374 (1906). In dieser Arbeit sind die Werte λ für den nach Zehnteln unterteilten Bereich $\varepsilon = 0$ bis 1 berechnet; der dort angegebene Zahlenwert β entspricht dem λ^4 .

Nach Gl. (f) ist

$$m = \frac{\sin \lambda}{s_a s_b}, \quad n = \frac{\mathfrak{S} \sin \lambda}{\mathfrak{S}_a \mathfrak{S}_b},$$

womit (17) umgeformt wird in

$$s_a \sin \lambda (\mathfrak{S}_a \mathfrak{S} \sin \lambda - \mathfrak{S}_b) = \mathfrak{S}_a \mathfrak{S} \sin \lambda (c_a \sin \lambda - s_b);$$

und hieraus ergibt sich mit

$$\mathfrak{S} \sin \lambda = \mathfrak{S}_a \mathfrak{C}_b + \mathfrak{S}_b \mathfrak{C}_a,$$

$$\sin \lambda = s_a c_b + s_b c_a;$$

$$\underline{\text{tg } \lambda = \mathfrak{T} \text{g } \lambda}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Frequenzgleichung dieses Trägers ohne Punktmasse.

(Eingegangen am 8. Oktober 1952.)

Beziehung zwischen den Charakteristiken und einer Berührungstransformation^{1, 2}.

Von C. Torre, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Aus den Gleichgewichtsbedingungen und der Grenzbedingung in beliebigen Koordinaten (x, y) ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Charakteristiken, die mit dem Ausdruck für die Tangente der Mohrschen Hüllkurve (= Methode nach einer Berührungstransformation) gleich sind. Anschließend wurde ein allgemeiner Ausdruck für das Reibungsgesetz vorgeschlagen.

Summary. From the conditions of equilibrium and the condition of limit in optional coordinates (x, y) there results a linear, partial differential equation of the second order with the characteristics which are equal to the term for the tangent of the enveloping curve of Mohr (= method according to a contact transformation). Then a general term for the law of friction has been suggested.

Résumé. Des conditions d'équilibre et de la condition limite en coordonnées quelconques (x, y) il résulte une équation différentielle, linéaire et partielle du deuxième ordre avec les valeurs caractéristiques qui sont égales au terme pour la tangente de la courbe enveloppeuse de Mohr (= méthode selon une transformation à contact). Puis un terme général est proposé pour la loi du frottement.

Nachfolgend werden wir auf die Gleichheit der Lösungen des Problems der Grenzbeanspruchung hinweisen, und zwar: Einerseits nach der Methode der Mohrschen Hüllkurve (das heißt, nach einer Berührungstransformation) und andererseits nach der Methode der Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Gleichheit hat der Verfasser beim Vortrag von Frau Professor Dr. Hilda Geiringer am 4. Oktober 1951 in Wien bemerkt, und diese in der nachfolgenden Diskussion mitgeteilt (s. Geiringer³, Abschnitt 5). Die Verallgemeinerung der obenerwähnten Übereinstimmung der Lösungen würde darin bestehen, eine solche „aequatio directrix“ der Berührungstransformation zu suchen, deren Lösungen mit den Charakteristiken der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung identisch sein werden.

¹ Vorgetragen am 12. September 1952 auf dem III. Österreichischen Mathematiker-Kongreß in Salzburg.

² Herrn Prof. Dr.-Ing. A. L. Nadai (Pittsburgh, USA) zum 70. Geburtstage gewidmet.

³ H. Geiringer: Über die Charakteristiken des vollständigen ebenen Plastizitätsproblems. Erscheint demnächst in Z. angew. Math. Mechan.

Die Untersuchungen des Verfassers⁴ im Jahre 1945 und 1946 über die Spannungen σ und τ (das sind die Abszisse und die Ordinate der Mohrschen Hüllkurve) und über die Tangente dieser Hüllkurve wurden im Koordinatensystem der Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 durchgeführt. Dieselben Ableitungen über die Richtungen (nicht über die Spannungen σ und τ) haben Neuber⁵ und Sauer⁶ in beliebigen Koordinaten des Spannungstensors $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ im Jahre 1948 bzw. 1949 veröffentlicht. Wir haben seinerzeit die Berechnung deshalb nur in den Hauptrichtungen durchgeführt, da man aus den bekannten Beziehungen

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

bei gegebenen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ die Hauptrichtungen leicht berechnen kann. Vollständigkeitshalber müssen jedoch die Beziehungen auch in beliebigen Richtungen abgeleitet werden. Es ist deshalb unsere Aufgabe, hier unter anderem zu zeigen, daß man nach einer Berührungstransformation, und zwar mit Hilfe der Spannungsvarianten Gl. (1) und (2) die Berechnung sowohl in Hauptrichtungen (1, 3) als auch in beliebigen Richtungen (x, y) gleichzeitig und sehr einfach durchführen kann. Wir erwähnen noch, daß Mandel⁷, Mises⁸ und Sauer⁶ die Gleitliniennetze allgemein untersucht haben, während der Verfasser^{9, 10} eine andere Methode vorgeschlagen hat.

Die Invarianten des ebenen Spannungszustandes lauten

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_3. \quad (1, 2)$$

Die Gleichung eines Spannungskreises („aequatio directrix“), ausgedrückt mit Hilfe der Invarianz Gl. (1) und (2), ist

$$W \equiv \sigma^2 + \tau^2 - \sigma \cdot J_1 + J_2 = 0. \quad (3)$$

In Gl. (3) treten zwei Gruppen von Größen auf: σ, τ und J_1, J_2 , die untereinander durch je eine Funktion verbunden sind, und zwar:

— a) Die Gleichung der Hüllkurve von Mohr

$$\tau = \tau(\sigma), \quad (4)$$

— b) die Gleichung der Grenzbedingung

$$J_2 = J_2(J_1); \quad (5)$$

bzw. in den Hauptrichtungen (1, 3)

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \quad (6)$$

oder in beliebigen Richtungen (x, y)

$$\sigma_x = \sigma_x(\sigma_y, \tau_{xy}) \quad (7)$$

ausgedrückt. Es möge hier ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) **allgemein nur eine Belastungsart ausdrückt** und nicht, wie in der Literatur üblich, den **ebenen** Spannungszustand bedeutet. Der letztere wird nur in jeweils einem einzigen Punkt jeder Belastungsart vertreten.

⁴ C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. **1**, 36, 316 (1946). — Die erste Arbeit (S. 36) wurde im Monat Dezember 1945 eingereicht bzw. zunächst in Z. angew. Math. Mechan. am 12. Februar 1945, wo sie wegen des Kriegsendes nicht mehr erscheinen konnte.

⁵ H. Neuber: Z. angew. Math. Mechan. **28**, 253 (1948).

⁶ R. Sauer: Z. angew. Math. Mechan. **29**, 274 (1949).

⁷ J. Mandel: C. R. hebdom. Séances Acad. Sci. **206**, 371 (1938); **583**, 1272 (1947).

⁸ R. Mises: Reissner Anniversary Volume, Ann. Arbor. Mich. **415** (1949).

⁹ C. Torre: Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. **15**, 116, 145 (1949); Österr. Ingenieur-Arch. **4**, 93 (1950).

¹⁰ C. Torre: Der Spannungszustand in einem schweren Erdkörper. S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **156**, 583 (1947).

Die notwendigen Bedingungen für das Bestehen einer Berührungstransformation zwischen der Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) und der Hüllkurve aller Grenzspannungskreise Gl. (4) ergeben sich aus der „aequation directrix“ Gl. (3) zu (s. Lie¹¹, Coursat¹², Madelung¹³)

$$\frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \cdot \frac{dJ_2}{dJ_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial W}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma} = 0. \quad (8, 9)$$

Aus Gl. (3) und (8) ergibt sich der Ausdruck für die Normalspannung zu

$$\sigma = \frac{dJ_2}{dJ_1} = \frac{d(\sigma_1 \cdot \sigma_3)}{d(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{d(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}{d(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (10)$$

bzw. nach Gl. (10) und (3) der Ausdruck für die Schubspannung (mit $J_2' = dJ_2/dJ_1$)

$$\tau_2 = J_2' \cdot J_1 - J_2 - J_2'^2. \quad (10a)$$

Die hinreichende Bedingung für die Berührungstransformation

$$\frac{\partial \sigma}{\partial J_2'} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial J_1} + \frac{\partial \tau}{\partial J_2} \cdot J_2' \right) = \frac{\partial \tau}{\partial J_2'} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial J_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial J_2} \cdot J_2' \right)$$

ist mit Gl. (10) und (10a) befriedigt. Aus Gl. (10) folgt nach der Differentiation und Division durch $d\sigma_3$ bzw. $d\sigma_y$ sowie mit der Beziehung $\sigma_1' = d\sigma_1/d\sigma_3$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \sigma_1'}{1 + \sigma_1'} = \frac{\sigma_y \cdot \frac{d\sigma_x}{d\sigma_y} + \sigma_x - 2 \tau_{xy} \cdot \frac{d\tau_{xy}}{d\sigma_y}}{1 + d\sigma_x/d\sigma_y}. \quad (11)$$

Der Ausdruck für die Normalspannung in einer beliebigen Schnittfläche des ebenen Spannungszustandes lautet, wenn φ der Winkel zwischen der Normalen einer beliebigen Schnittfläche und der y -Achse bzw. α zwischen der Normalen und der Hauptnormalspannung σ_1 ist (s. z. B. A. Föppl¹⁴, S. 25ff.)

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sigma_y \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + \sigma_x + 2 \tau_{xy} \cdot \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (12)$$

Sind in Gl. (12) die Spannungen und Gleitwinkel aus den Versuchen bekannt, dann kann man die wahre Normalspannung σ in der Bruch- bzw. Gleitfläche nach Gl. (12) berechnen. Die Berechnung der Normalspannung σ nach Gl. (11) ist dann und nur dann mit der wahren Spannung σ nach Gl. (12) identisch, wenn 1. in Gl. (11) und (12) gleiche Spannungen eingesetzt werden und 2. folgende Beziehungen gelten, die sich aus dem Koeffizientenvergleich der Gl. (11) und (12) ergeben:

a) Für die Hauptrichtungen (1, 3)

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \sigma_1', \quad (13)$$

b) für die beliebigen Richtungen (x, y)

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = d\sigma_x/d\sigma_y, \quad \operatorname{tg} \varphi = -d\tau_{xy}/d\sigma_y. \quad (14, 15)$$

Gl. (14) und (15) hat schon Neuber⁵ in etwas anderer Form abgeleitet. Sie dienen nur als Übergangsgleichungen zur Gl. (17), mit der wir rechnen werden. Berücksichtigen wir in Gl. (14) die Grenzbedingung (7), dann ergibt sich

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} \cdot \frac{d\tau_{xy}}{d\sigma_y}. \quad (16)$$

¹¹ S. Lie: Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von S. Lie und G. Schäffers. Verlag Teubner. 1896.

¹² E. Coursat: Cours d'analyse mathématique, Tome I, 2. édition., p. 140ff. Gautier Villars. 1910. — Deutsch von J. M. Schwarz: Lehrbuch der Analysis, S. 126. Verlag Veit. 1914.

¹³ E. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl., S. 104. Springer-Verlag. 1936.

¹⁴ A. Föppl: Festigkeitslehre. Bd. III der Vorlesungen über Technische Mechanik. Teubner. 1918.

Aus Gl. (15) und (16) ergibt sich eine quadratische Gleichung in $\operatorname{tg} \varphi$ mit der Lösung

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_y}}. \quad (17)$$

Die Gleichheit der Lösungen ergibt sich, wenn wir diese Untersuchung (s. auch Anm. 4) mit der Arbeit von Sauer⁶ vergleichen. Gl. (13) bis (17) sind aus der Betrachtung der Berührung der Mohrschen Hüllkurve Gl. (4) mit dem Spannungskreis Gl. (3) erfolgt. Dieselben Gleichungen ergaben sich auch aus der Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen und der Grenzbedingung Gl. (7)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \sigma_x = \sigma_x(\sigma_y, \tau_{xy}).$$

Dabei ergeben sich die Richtungsgleichungen (17) als Charakteristiken der partiellen und linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir haben zunächst die Grenzspannungskreise untersucht⁴, die die Hüllkurve imaginär berühren, Geiringer³ hat die imaginären Charakteristiken untersucht. Wir konnten feststellen, daß die Spannungszustände, die sich aus den imaginären Berührungen ergeben, sich meistens im Gebiet der dreiachsigen Zugbeanspruchungen befinden und daß sie die Möglichkeit liefern, spröde Brüche von bildsamen Metallen zu untersuchen. Diese imaginären Bereiche sind also besonders wichtig für die Untersuchung der Festigkeit von Schweißverbindungen¹⁵.

Gl. (17) hat schon Sauer⁶ abgeleitet. Wir zeigen nachfolgend, wie sich Gl. (17) aus der Arbeit von Neuber⁵ ergibt: Die aus Gl. (9) und (10) abgeleitete Gl. (12) von Neuber lautet mit der Grenzbedingung Gl. (7):

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} \right)^2 = 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} / \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} / \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} \right)^2 = 0. \quad (18)$$

Weiterhin lautet Gl. (9) von Neuber mit der Umrechnung auf unsere Bezeichnungen $\alpha = \pi - \varphi$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} / \frac{\partial \sigma_y}{\partial u}. \quad (19)$$

Aus Gl. (18) und (19) erhalten wir eine quadratische Gleichung in $\operatorname{tg} \varphi$, deren Lösung mit Gl. (17) übereinstimmt.

In den Hauptnormalspannungsrichtungen haben wir $\tau_{xy} = 0$, $\partial/\partial \tau_{xy} = 0$ und $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_3$ bzw. $\partial \sigma_x / \partial \sigma_y = d\sigma_1 / d\sigma_3$. Gl. (17) geht dann in die vom Verfasser abgeleitete Gl. (13) über.

Aus Gl. (14) und (15) ergibt sich eine schon von Neuber⁵ abgeleitete Beziehung:

$$d\sigma_x d\sigma_y - (d\tau_{xy})^2 = 0. \quad (20)$$

Auf Grund der oben durchgeführten Ableitungen ist die Schubspannung (= die Ordinate) der Mohrschen Hüllkurve leicht zu berechnen. Wir gehen vom Ausdruck für die Schubspannung des ebenen Spannungszustandes aus (s. Föppl¹⁴), die lautet:

$$\tau = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} [(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} \varphi + \tau_{xy} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)] = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (21)$$

Setzen wir den Ausdruck für $\operatorname{tg} \varphi$ bzw. $\operatorname{tg} \alpha$ aus Gl. (17) bzw. (13) in Gl. (21) ein, dann erhalten wir die gesuchte Schubspannung (die Ordinate) der Mohrschen Hüllkurve. Wie weit die Gl. (11), (13), (17) und (21) den physikalischen Ergebnissen entsprechen, werden wir nachfolgend untersuchen.

¹⁵ C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 4, 174 (1950).

Um nun zu überprüfen, wie weit diese mathematisch formalen Ableitungen mit den physikalischen Ergebnissen übereinstimmen, haben wir in Abb. 1 die Ergebnisse der Versuche von Roš und Eichinger¹⁶ aufgetragen. Die voll ausgezogene wahre

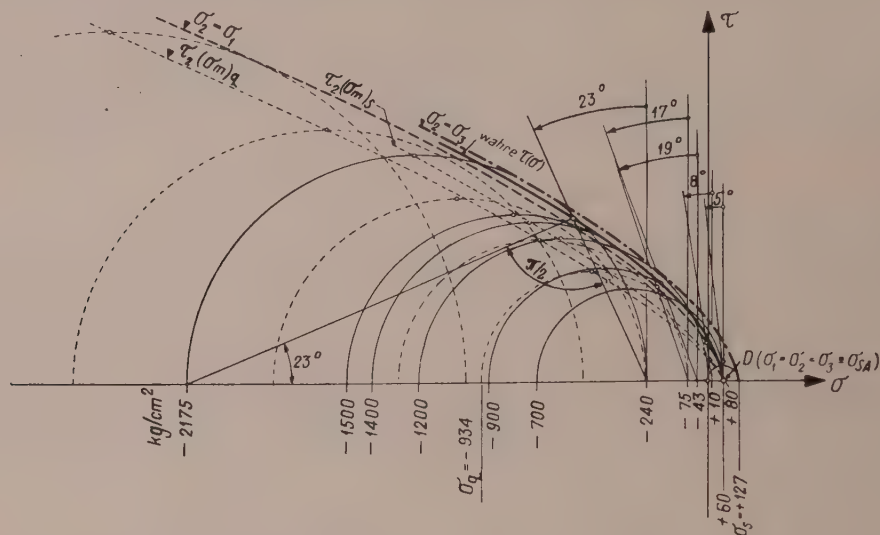


Abb. 1. Die Zug- und Druckversuche an Marmor I von M. Roš und A. Eichinger. Unterschiede zwischen der Hüllkurve (strichpunktirt) und der wahren Grenzkurve (voll) $\tau_w(\sigma)$.

Grenzkurve $\tau(\sigma)$ wurde mit Hilfe der gemessenen Spannungen und Bruch- bzw. Gleitwinkel gezeichnet. Sie ergibt sich aus Gl. (12) und (21), wenn die Spannungen und Bruchwinkel aus den Versuchen bekannt sind. Mit gleichen versuchsmäßig

ermittelten Spannungen, ohne die Winkel zu benutzen, haben wir die strichpunktirte Hüllkurve gezeichnet. Wie man aus Abb. 1 sieht, stimmt die wahre Grenzkurve mit der Hüllkurve im Druckbereich gut überein, während sie im Zugbereich größere Abweichungen aufweist. Wir können also die Berechnung der Spannungen in der Gleit- bzw. Bruchfläche nach Gl. (12) und (21) und der Winkel nach Gl. (13) bzw. (17) mit Hilfe einer mathematisch-quantitativ ausgedrückten Hüllkurve Gl. (4) bzw. Grenzkurve Gl. (5) bis (7) nur dann empfehlen, wenn im Körper vorwiegend Druckspannungen herrschen,

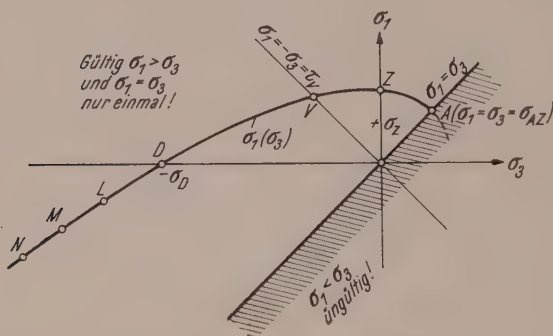


Abb. 2. Grenzkurve $\sigma_1(\sigma_3)$ schematisch. (Tatsächlich gehören die Spannungen σ_Z und σ_D zu den zwei verschiedenen Grenzkurven.)

während man bei vorwiegenden Zugspannungen mit diesen Gleichungen vorsichtiger rechnen muß. Das gleiche gilt freilich auch für die Berechnung mit Hilfe der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen.

Nachfolgend werden wir einige Bemerkungen über den mathematischen Ausbau und über die physikalische Bedeutung der Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) machen. Der allgemeine mathematische Ausdruck dieser Grenzbedingung bezieht sich auf ein allgemeines Festigkeitsverhalten der Werkstoffe. Um diese Behauptung zu veranschaulichen, haben wir in Abb. 2 die Grenzbedingung Gl. (6) $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$ schematisch

dargestellt. Sie gilt teilweise für das spröde, teilweise für das bildsame Verhalten eines Stoffes. Der Punkt A entspricht der Kohäsionsfestigkeit des Materials mit einem spröden, verformungslosen Trennbruch. Ebenso liefern die Punkte Z (Zugfestigkeit) und V (Verdrehungsfestigkeit) Trennbrüche spröder Stoffe. Punkt D (Druckfestigkeit) liefert nach Abb. 3 (links oben) den spröden Verschiebungsbruch. Punkte L, M, N entsprechen den Probekörpern in Abb. 3, und zwar in der Reihenfolge: rechts oben, links unten, rechts unten. Abb. 3 ist aus den Versuchen von Roš und Eichinger¹⁶ an zylindrischen Marmor-

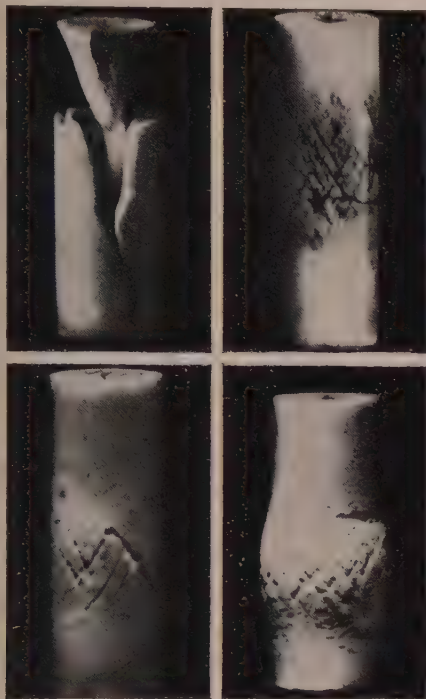


Abb. 3. Druckversuche an Marmorzylinder von Roš und Eichinger. Oben links: Druck, oben rechts: Druck unter 75 Atm. Unten links: Druck unter 240 Atm., rechts unten: Druck unter 500 Atm.

körpern entnommen. Der Zylinder in Abb. 3 links oben wurde auf dem einachsigen Druck beansprucht. Die Zylinder rechts oben, links und rechts unten wurden auf Druck mit allseitig gleichem Druck von 75, 240 und 500 Atm. beansprucht. Die mit zunehmendem allseitig gleichem Druck zunehmende Bildsamkeit des als spröde bekannten Marmors ist aus Abb. 3 ersichtlich.

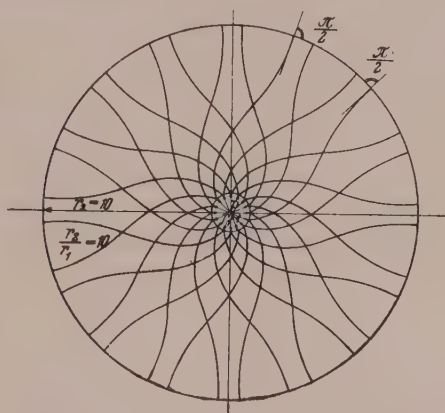


Abb. 4. Das auf Innendruck beanspruchte Rohr aus sprödem Material. Die Gleitlinien.

Zur Frage der Verfestigung müssen wir auf die Ausführungen des Verfassers⁹ hinweisen, in welchen die Grenzfläche $F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0$ in Verbindung mit

den Spannungs-Dehnungs-Linien der drei beanspruchten Körper untersucht wurde. Es hat sich ergeben, daß die Erfassung der Verfestigung in einer allgemeinen Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) ebenso einfach ist, wie die Erfassung der spröden Brüche und bleibenden Formänderungen. Die Betonung der Bedeutung der Verfestigung in der Literatur kam durch die Untersuchung des ideal-plastischen Körpers mit der Berücksichtigung der einachsigen Spannungs-Dehnungs-Linie zustande.

In Abb. 1 wurde mit Hilfe der Versuchsergebnisse von Roš und Eichinger¹⁶ eine Hüllkurve strichpunktiert gezeichnet, die auch alle obenerwähnten und verschiedenartigen Festigkeitseigenschaften in sich enthält. Wie schon erwähnt, enthält auch die Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) alle diese verschiedenen Festigkeitseigenschaften, unter anderem auch deshalb, weil eine Grenzkurve aus einer Berührungstransformation der Hüllkurve Gl. (4) erhalten wird. — Wir erwähnen hier noch, daß man mit einer Grenzkurve Gl. (6), wie in Abb. 2, nicht gleichzeitig die Zugfestigkeit σ_z und Druck-

¹⁶ M. Roš und A. Eichinger: Berichte Nr. 28 und 172 der EMPA in Zürich. 1928 und 1949.

festigkeit σ_a erfassen kann, da diese verschiedenen Belastungsarten gehören (s. beim Verfasser⁴). Das ist ein Nachteil der „ebenen“ Theorie, der nur durch die dreiachsige Bruchtheorie behoben wird [s. Bemerkung nach Gl. (7)].

Als Beispiel für diese Ausführungen zeigen wir in Abb. 4 das auf Innendruck beanspruchte Rohr (aus⁴, S. 46, Abb. 9). Hiermit haben wir mit einem unhomogen beanspruchten Körper zu tun, dessen Punkte durch verschiedene Spannungszustände beansprucht sind. Hiermit muß dieser Körper auch verschiedene Festigkeitsverhalten ergeben. Am Außenrand des Rohres $r = r_2$ verlaufen die Bruchlinien in unendlich kleinen untereinander parallel (im endlich Großen: radial) und senkrecht zum Rand, sowie senkrecht zur Tangentialspannung, was einen Trennbruch ergibt. Innerhalb des Rohres geht dann der Trennbruch in den Verschiebungsbruch über, während am Innenrand $r = r_1$ und in seiner Umgebung haben wir die Gleitlinien und bleibende Formänderungen. Diese Berechnung wurde mit Hilfe einer algebraischen Gleichung zweiten Grades durchgeführt (mit der Hüllparabel von Leon¹⁷). Wir sehen daraus, daß schon eine quadratische Grenzbedingung fähig ist, das allgemeine Festigkeitsverhalten eines Stoffes in großen Zügen zu beschreiben. Um so mehr kann man diese Bedeutung den allgemeinen, quantitativ nicht ausgedrückten Gl. (5) bis (7) zuschreiben. Der ideal-plastische Stoff ist ein Sonderfall der Grenzbedingung Gl. (5) bis (7) und schlechthin auch ein Sonderfall der quadratischen Form der Grenzbedingung bei numerischer Auswertung; bei theoretischen Ableitungen muß die Funktion Gl. (5) bis (7) gewissen speziellen Bedingungen genügen (s. Sauer⁶, Geiringer³).

Wie der Sonderfall der oben erwähnten imaginären Bereiche zur Kohäsionsfestigkeit des Materials führt, haben wir an anderer Stelle schon berichtet¹⁸. Wir wollen nachfolgend noch auf die Deutung einer vom Verfasser⁴ schon abgeleiteten Gleichung hinweisen. Hier handelt es sich um ein Reibungsgesetz, das nach Gl. (3) und (9) lautet:

$$\tau' = d\tau/d\sigma = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} \cdot J_1 - \sigma \right). \quad (22)$$

Mit den Größen σ , τ nach Gl. (12) und (21), J_1 nach Gl. (1) und $\operatorname{tg} \varphi$ nach Gl. (17) lautet Gl. (22):

$$\tau' = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) + 4 \tau_{xy} \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} \varphi + 2 \tau_{xy}(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}. \quad (23)$$

Gl. (23) erhält man in Haupttrichtungen [$\tau_{xy} = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$ nach Gl. (13)].

$$\tau' = \frac{d\tau}{d\sigma} = \pm \frac{1 - \sigma_1'}{2 \sqrt{\sigma_1'}}. \quad (24)$$

Gl. (24) kann mit Hilfe des Ausdruckes $\sigma_1' = e^{2x}$ in folgender Form transformiert werden:

$$\tau' = \pm \mathfrak{S} \ln \sqrt{\sigma_1'} = \pm \mathfrak{S} \ln (\operatorname{tg} \alpha). \quad (25)$$

Gl. (22) bis (25) stellt den Ausdruck für die Tangente der Hüllkurve und nicht der wahren Grenzkurve nach Abb. 1 dar. Sie liefert deshalb bei Druckbeanspruchungen bessere Ergebnisse als bei Zugbeanspruchungen. Für $\sigma_1' = \text{konst.}$ geht Gl. (24) in das bekannte Reibungsgesetz von Coulomb $\tau/\sigma = \text{konst.}$ über, das in der Mechanik kohäsionsloser Massen als Rankinesche Grenzbedingung bekannt ist und die Bedeutung der inneren Reibung loser Massen hat. Wir haben uns diesbezüglich an anderer Stelle schon beschäftigt¹⁰.

¹⁷ A. Leon: Ingenieur-Arch. 4, 421 (1923).

¹⁸ C. Torre: Z. angew. Math. Mech. 31, 275 (1951).

Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung*.

Von E. R. Berger, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Aus dem Satz vom Minimum der potentiellen Energie wird nach dem Vorgang von Trefftz ein zweites Minimalprinzip hergeleitet, wobei man auf die Erfüllung der Randbedingungen durch die Ansatzfunktionen verzichtet, dagegen Erfüllung der Differentialgleichung vorschreibt. Gegenüber der bisher üblichen Methode, die Summe der Fehlerquadrate am Rand zu einem Minimum zu machen, hat das beschriebene Verfahren den Vorteil, daß es keine willkürlich zu wählenden Gewichte enthält.

Summary. From the principle of minimum of the potential energy a second principle of minimum is derived according to the proceeding of Trefftz, whereby fulfilling the marginal conditions by the preliminary functions is renounced, whilst fulfilling the differential equation is prescribed. In contradistinction to the method hitherto used making the total of the error squares on the margin a minimum, the method described presents the advantage of not containing any weights arbitrarily to be selected.

Résumé. L'auteur utilise la thèse du minimum de l'énergie potentielle pour dériver selon la méthode de Trefftz un second principe de minimum en renonçant à remplir les conditions marginales posées par les fonctions préliminaires, mais en observant exactement l'équation différentielle. Au contraire de la méthode utilisée jusqu'à présent, c'est-à-dire de faire un minimum de la somme des carrés d'erreur au bord, la méthode décrite présente l'avantage de ne pas contenir des poids à choix arbitraire.

1. Einleitung.

Zur Auflösung der Plattengleichung verwendet man häufig einen Ansatz, dessen Glieder einzeln die (homogene) Plattengleichung erfüllen, die Randbedingungen aber verletzen; die Koeffizienten sind dann so zu bestimmen, daß die Randbedingungen durch den abgebrochenen Ansatz „bestens“ angenähert werden. Für die Definition der besten Annäherung verwendet man meist^{1, 2} die Summe der Fehlerquadrate. Diese Methode hat aber den prinzipiellen Nachteil, daß die einzelnen Summanden, w^2 , $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2$, $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right)^2$, $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3}\right)^2$, verschiedene Dimensionen haben und daher mit dimensionsbehafteten Gewichten multipliziert werden müssen, damit man sie überhaupt addieren kann. Diese Tatsache wurde anfänglich übersehen; Collatz³ weist ausdrücklich darauf hin (S. 323) mit der Bemerkung, daß bei günstiger Wahl der Gewichte bessere Resultate erzielt werden können. Tatsächlich fehlt aber jeder Anhaltspunkt für eine günstige Wahl dieser Gewichte und man könnte höchstens die fertigen Resultate vergleichen; und auch der Entscheid, welches Resultat besser ist, wird oft nicht leicht sein, falls nicht schon eine strenge Lösung zum Vergleich vorliegt.

Im folgenden soll ein anderer Weg gezeigt werden, der diese willkürliche Festsetzung von Gewichten vermeidet. Er ist eine Erweiterung der bekannten Methode von Trefftz⁴ für das Potentialproblem.

2. Das Randwertproblem.

Ich führe folgende Bezeichnungen ein:

K = Plattensteifigkeit;

μ = Querdehnungszahl;

* Herrn Prof. Dr. A. L. Nadai gewidmet.

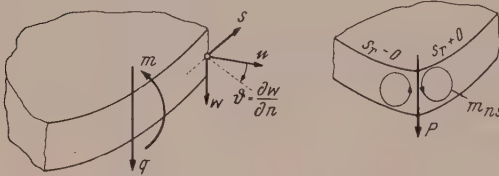
¹ Tölke: Talsperren, S. 405, in Ludin: Wasserkraftanlagen. 1938.

² Pucher: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten. Ing.-Arch. 12, 76—100 (1941). Vgl. S. 93.

³ Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 1951.

⁴ Trefftz: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. II. Int. Kongreß f. Techn. Mech., Zürich, 1926.

- \mathbf{x} = Ortsvektor in der Plattenebene;
 s = Weglänge entlang der Randkurve;
 $w(\mathbf{x})$ = die Durchbiegung der Platte;
 $p(\mathbf{x})$ = die Flächenlast;
 \mathfrak{R} = der aufgelagerte Rand, wo die Verschiebungen \bar{w} (bzw. ϑ) vorgegeben sind (Zwangsverschiebungen); im einzelnen:
 \mathfrak{R} = der unterstützte Rand (\bar{w} gegeben);
 \mathfrak{E} = der eingespannte Rand (ϑ gegeben);
 r = die unterstützte Ecke (\bar{w} gegeben);
 \mathfrak{R}' = der freie Rand, wo die äußeren Kräfte \bar{R} (im einzelnen: \bar{q} , \bar{m} , \bar{P}) vorgegeben sind (eingeprägte Kräfte); im einzelnen:
 \mathfrak{R}' = nicht unterstützter Rand (\bar{q} gegeben);
 \mathfrak{E}' = nicht eingespannter Rand (\bar{m} gegeben);
 r' = nicht unterstützte Ecke (\bar{P} gegeben).



a) stetig gekrümmte Randkurve b) scharfe Ecke
 Abb. 1. Positive Richtung der Randkräfte und Verschiebungen.

Da an jedem Randpunkt (ausgenommen die Ecken) zwei Randbedingungen bestehen, gehört jeder Randpunkt zwei der vorstehenden Bereiche an.

Die Differentialgleichung (Plattengleichung) lautet:

$$K \cdot \Delta w = p. \quad (1)$$

Die Randbedingungen:

$$\text{in } \mathfrak{R}: w = \bar{w}(s), \quad \text{in } \mathfrak{E}: \frac{\partial w}{\partial n} = \vartheta(s), \quad \text{in } r: w = \bar{w}(s_r); \quad (2a, b, c)$$

oder, zusammengefaßt und symbolisch geschrieben:

$$\text{in } \mathfrak{R}: w = \bar{w} \quad (\text{Zwangsbedingungen}); \quad (2)$$

$$\text{in } \mathfrak{R}': q(w) \equiv -K \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] = \bar{q}(s), \quad (3a)$$

$$\text{in } \mathfrak{E}': m(w) \equiv -K \left[\mu \Delta w + (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right] = \bar{m}(s), \quad (3b)$$

$$\text{in } r': P(w) \equiv -K \cdot (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \Big|_{s_r=0}^{s_r=+0} = \bar{P}_r \quad (3c)$$

oder zusammengefaßt:

$$\text{in } \mathfrak{R}': R(w) = \bar{R} \quad (\text{freie Randbedingungen}). \quad (3)$$

$q(w)$, $m(w)$, $P(w)$ sind dabei Abkürzungen für die daneben stehenden linearen Differentialausdrücke in w . In $P(w)$ bedeutet der lotrechte Strich die Differenz zwischen dem rechtsseitigen und dem linksseitigen Grenzwert des Differentialausdruckes.

3. Die Formänderungsarbeit.

Die Formänderungsarbeit der ganzen Platte wird bekanntlich beschrieben durch den Ausdruck

$$A_i(w) = \frac{K}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (4a)$$

Diesen Ausdruck wollen wir zunächst koordinatenfrei (vektoranalytisch) darstellen;

ich verwende dazu die Schreibweise von Lagally. Die erste Klammer ist Δw , die Determinante: $\text{Det } (\nabla; \nabla w)$. Nun gilt allgemein für einen zweidimensionalen Tensor \mathfrak{T} :

$$\text{Det } \mathfrak{T} = \frac{1}{2} [(\mathfrak{E} \cdot \cdot \mathfrak{T})^2 - (\mathfrak{T} \cdot \cdot \mathfrak{T})].$$

(\mathfrak{E} bedeutet den Einheitstensor, die zwei Punkte die doppelte Innenmultiplikation.) Mit $\mathfrak{T} = \nabla; \nabla w$ wird $\mathfrak{E} \cdot \cdot \mathfrak{T} = \Delta w$ und somit

$$A_i(w) = \frac{K}{2} \int_F dF \{ (\Delta w)^2 + (1 - \mu) [(\nabla; \nabla w) \cdot \cdot (\nabla; \nabla w) - (\Delta w)^2] \}. \quad (4b)$$

Das Bereichsintegral über die eckige Klammer läßt sich umwandeln in ein Umfangsintegral:

$$J = \oint ds \left(\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla w \right). \quad (5)$$

Es ist nämlich in der Ebene

$$\frac{\partial}{\partial s} = \mathbf{n} \times \nabla.$$

Ersetzen wir die beiden ∇w in (5) vorübergehend durch \mathbf{v} und $\bar{\mathbf{v}}$, wobei wir uns merken, daß das noch verbleibende ∇ (aus $\partial/\partial s$) sich nur auf \mathbf{v} bezieht, nicht aber auf $\bar{\mathbf{v}}$, so wird

$$\begin{aligned} J &= \oint ds (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{v}}) = \oint ds \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{v}})] = \\ &= \oint ds \mathbf{n} \cdot [\bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla; \mathbf{v}) - \bar{\mathbf{v}} (\nabla \cdot \mathbf{v})]. \end{aligned} \quad (5')$$

Darauf wenden wir den Gaußschen Satz an in der Form

$$\oint ds \mathbf{n} \cdot \dots = \int_F dF \nabla \cdot \dots$$

Dieses neue ∇ ist dabei auf sämtliche Funktionen anzuwenden, also sowohl \mathbf{v} als auch $\bar{\mathbf{v}}$. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} J &= \int_F dF \nabla \cdot [\bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla; \mathbf{v}) - \bar{\mathbf{v}} (\nabla \cdot \mathbf{v})] = \\ &= \int_F dF \{ (\nabla; \bar{\mathbf{v}}) \cdot \cdot (\nabla; \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla; \nabla) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla; \nabla) \cdot \mathbf{v} \}. \end{aligned}$$

Das zweite und das vierte Glied reduzieren sich; setzen wir für \mathbf{v} und $\bar{\mathbf{v}}$ wieder ∇w ein, ergibt sich schließlich

$$J = \int_F dF \{ (\nabla; \nabla w) \cdot \cdot (\nabla; \nabla w) - (\Delta w)^2 \} \quad (5'')$$

übereinstimmend mit der eckigen Klammer in (4b). Damit haben wir für A_i die weitere Form:

$$A_i(w) = \frac{K}{2} \left\{ \int_F dF (\Delta w)^2 + (1 - \mu) \oint \left(\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla w \right) ds \right\}. \quad (4c)$$

Im Randintegral verschwindet der Integrand, wenn

1. der Rand unverschieblich aufgelagert und eingespannt ist, weil dann am Rand $\nabla w = 0$ ist;
2. der Rand unverschieblich aufgelagert und geradlinig ist, weil dann $\partial w / \partial s = 0$ ist, also ∇w auf dem Rand senkrecht steht, ebenso seine Ableitung nach s , die beiden Faktoren sind also parallel, ihr Außenprodukt verschwindet;
3. der Rand geradlinig ist und dort $\partial w / \partial n = 0$ ist (z. B. am Feldrand einer unendlich ausgedehnten Pilzdecke mit gleicher und in sich symmetrischer Belastung der

einzelnen Felder); dort fällt ∇w in die Randrichtung, ebenso seine Ableitung, das Außenprodukt verschwindet.

(Für die erste Variation der Formänderungsarbeit hat bereits Willers⁵ das Verschwinden des Randintegrals in den Fällen 1 und 2 erkannt.) Die obigen drei Fälle wollen wir kurz als „ μ -freie Lagerung“ bezeichnen. Ist eine Platte am ganzen Umfang μ -frei gelagert, so ist bei gegebener Plattensteifigkeit K die Formänderungsarbeit und überhaupt die Lösung der Plattengleichung von μ unabhängig.

Ist der Rand unverschieblich aufgelagert, aber nicht geradlinig, so wird

$$\nabla w = n \frac{\partial w}{\partial n}, \quad \frac{\partial \nabla w}{\partial s} = n \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} + \frac{1}{\varrho} A \frac{\partial w}{\partial n},$$

wobei ϱ der Krümmungsradius der Randkurve ist, positiv für konvexen Rand; damit wird

$$\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla w = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2. \quad (4d)$$

$A_i(w)$ ist eine in w quadratische Differentialform. Werden daher zwei Verschiebungen $w + \eta$ überlagert, erhält man

$$A_i(w + \eta) = A_i(w) + A(w, \eta) + A_i(\eta), \quad (6')$$

wobei $A(w, \eta)$ den Ausdruck bedeutet:

$$A(w, \eta) = K \left\{ \int_F \nabla w \Delta \eta dF + (1 - \mu) \oint \left(\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla \eta \right) ds \right\}. \quad (6)$$

Auch hier verschwindet das Randintegral für μ -freie Lagerung, im Falle 1 sogar noch dann, wenn die Randverschiebungen fest vorgegeben, aber von Null verschieden sind; für die Variation η ist dann trotzdem am Rand $\nabla \eta = 0$.

Ist der Rand unverschieblich unterstützt, aber nicht geradlinig, wird wie oben

$$\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla \eta = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial n}.$$

Bilden wir $A_i(w + \varepsilon \eta)$, so ist die erste Variation

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = A(w, \eta). \quad (7)$$

Schließlich ist auch noch

$$A_i(w) = \frac{1}{2} A(w, w). \quad (8)$$

4. Die äußere Arbeit.

Führen wir die Verformung der Platte so durch, daß die eingepprägten Kräfte dabei von Anfang an mit vollem Betrag wirken, dann ist die hierbei geleistete Arbeit die sog. „Endwertarbeit der eingepprägten Kräfte“. (Nach Schleusner⁶ bezeichnet Endwertarbeit allgemein das einfache Produkt aus Kraftkomponente und Weg.) Sie beträgt

$$\overline{C}(w) = \int_F p w dF + \int_{\mathfrak{A}'} \bar{q}(s) \cdot w ds - \int_{\mathfrak{B}'} \bar{m}(s) \frac{\partial w}{\partial n} ds + \sum_{r'} \bar{P}_r w. \quad (9a)$$

Für die beiden Randintegrale und die Summe verwenden wir weiterhin die abgekürzte Schreibweise:

$$\int_{\mathfrak{A}'} [\bar{R}, w] ds = \int_{\mathfrak{A}'} \bar{q} w ds - \int_{\mathfrak{B}'} \bar{m} \frac{\partial w}{\partial n} ds + \sum_{r'} \bar{P} w. \quad (10)$$

⁵ Willers: Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter ebener Platten. Z. angew. Math. Mech. **20**, 118—121 (1940).

⁶ Schleusner: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. Beton u. Eisen **11**, 185—192 (1938). Vgl. S. 187.

Somit ist also

$$\bar{C}(w) = \int_{\bar{F}} p w dF + \int_{\mathfrak{R}'} [\bar{R}, w] ds. \quad (9b)$$

Variiert man die Durchbiegung w in der Art $w + \varepsilon \eta$ unter Einhaltung der Zwangsbedingungen, ergibt sich die Variation der Endwertarbeit, und damit auch die Variation der äußeren Arbeit zu

$$\delta A_a = \delta \bar{C} = \left. \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \bar{C}(\eta) = \int_{\bar{F}} p \eta dF + \int_{\mathfrak{R}'} [\bar{R}, \eta] ds. \quad (11)$$

Verstehen wir unter w die wahre Lösung, so gelten die Gleichgewichtsbedingungen (1) und (3); diese setzen wir in (11) ein. Ferner können wir das Randintegral jetzt auch über den aufgelagerten Rand \mathfrak{R} erstrecken, da dort wegen der Zwangsbedingungen $\eta = 0$ wird.

Somit ergibt sich

$$\delta A_a = K \int_{\bar{F}} \eta \Delta w dF + \oint [R(w), \eta] ds. \quad (12)$$

Da ferner, nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit, in der Nachbarschaft der wahren Lösung $\delta A_a = \delta A_i$ ist, ergibt sich aus (12) und (7) eine neue Darstellung für den Ausdruck $A(w, \eta)$:

$$A(w, \eta) = K \int_{\bar{F}} \eta \Delta w dF + \oint [R(w), \eta] ds. \quad (13)$$

Genau genommen, kann die hier gegebene Herleitung nur als heuristische Methode gewertet werden: die Äquivalenz der Ausdrücke (13) und (6) kann aber auch auf streng analytischem Wege gezeigt werden (vgl. Anhang).

Für die Formänderungsarbeit ergibt sich damit die neue Gestalt

$$A_i(w) = \frac{1}{2} A(w, w) = \frac{K}{2} \int_{\bar{F}} w \Delta w dF + \frac{1}{2} \oint [R(w), w] ds. \quad (13a)$$

Das Randintegral verschwindet überall, wo die Verschiebungen oder die Randkräfte Null sind.

5. Das erste Minimalprinzip.

Nach dem Satz vom Minimum der potentiellen Energie wird

$$\Pi = A_i - \bar{C} \rightarrow \text{Min.} \quad (14)$$

Für die Minimumsforderung zum Vergleich zugelassen sind sämtliche Funktionen $w + \varepsilon \eta$, welche die Zwangsbedingungen (2) erfüllen, das heißt es gilt

$$\text{auf } \mathfrak{R}: \eta = 0, \quad (15)$$

oder ausführlicher:

$$\text{auf } \mathfrak{A}: \eta = 0, \quad \text{auf } \mathfrak{E}: \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \text{auf } \mathfrak{r}: \eta = 0.$$

Dagegen dürfen die Vergleichsfunktionen die Differentialgleichung (1) und die freien Randbedingungen (3) verletzen.

Wir setzen daher die Lösung an in der Form (Ritzsches Verfahren):

$$w = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \quad (16)$$

wobei w_0 auf \mathfrak{R} die vorgeschriebenen Randwerte \bar{w} annimmt und die übrigen w_k sämtlich den Randbedingungen (15) genügen. Außerdem müssen die w_k mindestens zweimal differenzierbar sein, weil A_i nach (6) den Ausdruck Δw enthält; falls wir aber die Form (13a) verwenden wollen, müssen die w_k sogar viermal differenzierbar sein, also $\Delta \Delta w$ existieren.

Da die Vergleichsfunktionen die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllen, dürfen wir für $\delta\bar{C}$ nicht die Form (12) verwenden, sondern müssen die ursprüngliche Form (11) einsetzen. Es ergibt sich:

$$0 = \delta\Pi = \delta A_i - \delta\bar{C} = A(w, \eta) - \bar{C}(\eta) \quad (14')$$

und speziell

$$0 = \frac{\partial\Pi}{\partial c_k} = A(w, w_k) - \bar{C}(w_k)$$

mit (13) und (11):

$$0 = \int_F w_k (K \Delta w - p) dF + \int_{\mathfrak{H}'} [R(w) - \bar{R}, w_k] ds. \quad (17)$$

[Das Randintegral in (13) kann wegen der Randbedingungen (15) wieder auf \mathfrak{H}' beschränkt werden.]

Falls wir zusätzlich vorschreiben, daß die Vergleichsfunktionen auch noch die freien Randbedingungen (3): $R(w) = \bar{R}$ erfüllen müssen (was aber bei der Ritzschen Methode nicht nötig ist), oder falls überhaupt keine freien Ränder vorhanden sind (voll eingespannte Platte), dann fällt das Randintegral weg und es bleiben die bekannten Galerkinschen Gleichungen übrig:

$$0 = \int_F w_k (K \Delta w - p) dF. \quad (17')$$

Sind alle eingepprägten Randkräfte Null, so ist $\bar{C} = \int_F p w dF$ und wir können für $A(w, w_k)$ die Form (6) verwenden:

$$0 = \int_F \left(\Delta w \Delta w_k - \frac{p}{K} w_k \right) dF + (1 - \mu) \oint \left(\frac{\partial V w}{\partial s} \times \nabla w_k \right) ds. \quad (17'')$$

Ist die Platte überall μ -frei gelagert und sind die eingepprägten Randkräfte Null, ergibt sich daraus die einfachere Form

$$0 = \int_F \left(\Delta w \Delta w_k - \frac{p}{K} w_k \right) dF. \quad (17''')$$

Hat man aus dem Gleichungssystem (17) in einer der drei Formen die Unbekannten c_k bestimmt, so kann man den Extremwert von Π berechnen. Da wir aber immer nur eine endliche Anzahl von c_k berücksichtigen können, wird der abgebrochene Ausdruck $w = w_0 + \eta$ immer nur eine Näherungslösung darstellen, und der dazugehörige Wert Π_{\min} immer größer sein als der zur wahren Lösung gehörige Wert Π^* .

Es ergibt sich nach (6') und (9):

$$\Pi(w_0 + \eta) = A_i(w_0) + A(w_0, \eta) + A_i(\eta) - \bar{C}(w_0) - \bar{C}(\eta). \quad (18)$$

Darin sind die Ausdrücke $A(w_0, \eta)$ und $\bar{C}(\eta)$ in den c_k linear, $A_i(\eta)$ ist in den c_k quadratisch. Ist nun allgemein ein gemischt-quadratischer Ausdruck

$$\Pi = c + \sum_k b_k x_k + \sum_k \sum_n a_{k,n} x_k x_n \quad (19)$$

durch entsprechende Wahl der x_k zu einem Extrem zu machen, so lauten zunächst die Bestimmungsgleichungen für die x_k :

$$0 = \frac{\partial\Pi}{\partial x_k} = b_k + 2 \sum_n a_{k,n} x_n.$$

Mit den x_k multipliziert und addiert, ergeben sie

$$0 = \sum_k b_k x_k + 2 \sum_k \sum_n a_{k,n} x_n x_k$$

und das in (19) eingesetzt, ergibt für den Extremwert

$$\Pi_{\min} = c + \frac{1}{2} \sum_k b_k x_k, \quad (19')$$

das heißt zur Berechnung des Extremwertes hat man die linearen Glieder halb zu nehmen, die quadratischen wegzulassen.

Nach dieser Regel ergibt sich aus (18):

$$\Pi_{\min} = A_i(w_0) + \frac{1}{2} A(w_0, \eta) - \bar{C}(w_0) - \frac{1}{2} \bar{C}(\eta). \quad (18')$$

Sind sämtliche Zwangsverschiebungen am Rande Null, dann können wir $w_0 = 0$ setzen, damit wird $\eta = w$, und es bleibt

$$\Pi_{\min} = -\frac{1}{2} \bar{C}(w). \quad (18'')$$

Wie schon oben erwähnt, ist für die (unbekannte) wahre Lösung w^* :

$$\Pi^* \leq \Pi_{\min}.$$

6. Das zweite Minimalprinzip.

Wir führen nun eine Transformation durch, die der bekannten Transformation von Friedrichs⁷ entspricht; wir wollen nämlich auch von der bisher eingehaltenen Forderung der Zwangsbedingungen abgehen und statt dessen diese Bedingungen, mit Lagrange-Faktoren λ , μ , ν multipliziert, in den Extremalausdruck hineinnehmen. Wir erhalten damit den neuen Ausdruck

$$\Pi' = \Pi - \int_{\mathfrak{A}} \lambda(s) [w - \bar{w}(s)] ds + \int_{\mathfrak{B}} \mu(s) \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \vartheta(s) \right] ds + \sum_r \nu_r [w - \bar{w}(s_r)] \quad (20')$$

oder in Analogie zu (10) abgekürzt geschrieben:

$$\Pi' = \Pi - \int_{\mathfrak{A}} [\varrho, w - \bar{w}] ds \rightarrow \text{stat.}, \quad (20)$$

wobei ϱ die drei Lagrange-Faktoren symbolisiert.

Von diesem Ausdruck dürfen wir nun nicht mehr verlangen, daß er ein Extrem wird, sondern nur, daß er in der Umgebung der wahren Lösung stationär wird.

Zunächst bestimmen wir die Lagrange-Faktoren, indem wir die erste Variation bilden; unter Verwendung von (14') ergibt sich

$$\delta \Pi' = A(w, \eta) - \bar{C}(\eta) - \int_{\mathfrak{A}} [\varrho, \eta] ds$$

und darin (13) und (9b) eingesetzt:

$$\delta \Pi' = \int_{\mathfrak{F}} \eta (K \Delta w - p) dF + \int_{\mathfrak{B}'} [R(w) - \bar{R}, \eta] ds + \int_{\mathfrak{A}} [R(w) - \varrho, \eta] ds.$$

Für die wahre Lösung verschwinden wegen (1) und (3) die ersten beiden Integrale von selbst. Damit auch das dritte Integral für jede Variation η verschwindet, muß

$$\varrho = R(w) \quad (21)$$

sein, oder ausführlich

$$\lambda = q(w), \quad \mu = m(w), \quad \nu = P(w). \quad (21a-c)$$

Damit wird

$$\Pi' = A_i - \bar{C} - \int_{\mathfrak{A}} [R(w), w - \bar{w}] ds \quad (22)$$

⁷ Vgl. z. B. Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. I, S. 202ff. 1931.

und die erste Variation

$$\delta\Pi' = \int_F \eta (K \Delta\Delta w - p) dF + \int_{\mathfrak{R}'} [R(w) - \bar{R}, \eta] ds - \int_{\mathfrak{R}} [R(\eta), w - \bar{w}] ds = 0. \quad (23a)$$

Setzen wir die Lösung an in der Form

$$w = \sum c_k w_k,$$

so lauten die Bestimmungsgleichungen für die c_k entsprechend

$$0 = \frac{\partial\Pi'}{\partial c_k} = \int_F w_k (K \Delta\Delta w - p) dF + \int_{\mathfrak{R}'} [R(w) - \bar{R}, w_k] ds - \int_{\mathfrak{R}} [R(w_k), w - \bar{w}] ds. \quad (23b)$$

Wir können nun den (bisher ganz willkürlichen) Vergleichsfunktionen wieder gewisse Bedingungen auferlegen: So wollen wir zunächst fordern, daß sie der Differentialgleichung (1) genügen. Wir setzen zu diesem Zweck an

$$w = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k,$$

worin

$$K \Delta\Delta w_0 = p$$

und für alle weiteren k :

$$\Delta\Delta w_k = 0. \quad (24)$$

Damit fällt in (23) zunächst das Bereichsintegral weg, es bleibt

$$\int_{\mathfrak{R}'} [R(w) - \bar{R}, w_k] ds - \int_{\mathfrak{R}} [R(w_k), w - \bar{w}] ds = 0. \quad (25)$$

Schreiben wir dann weiter noch vor, daß w auch den freien Randbedingungen genügen soll (womit dann sämtliche Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind), also auf \mathfrak{R}' :

$$R(w) = \bar{R},$$

das heißt

$$R(w_0) = \bar{R},$$

und für alle weiteren k :

$$R(w_k) = 0, \quad (26)$$

so fällt auch noch das Integral über \mathfrak{R} weg, und es bleibt

$$\int_{\mathfrak{R}'} [R(w_k), w - \bar{w}] ds = 0. \quad (27)$$

Das Ergänzungspotential Π' wird in diesem Falle wieder ein Extrem, und zwar ein Maximum. Es läßt sich nach (22) darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} \Pi' = & \frac{1}{2} \left\{ K \int_F w \Delta\Delta w dF + \oint [R(w), w] ds \right\} - \\ & - \left\{ \int_F p w dF + \int_{\mathfrak{R}'} [\bar{R}, w] ds + \int_{\mathfrak{R}} [R(w), w] ds \right\} + \int_{\mathfrak{R}} [R(w), \bar{w}] ds. \end{aligned}$$

Die zweite Klammer ist das Doppelte der ersten, welche die Entwicklung von A_i darstellt; die dritte Klammer ist die Endwertarbeit der Zwangsverschiebungen C . Damit wird

$$\Pi' = -A_i + C \rightarrow \text{Max.} \quad (28)$$

Dabei sind zum Vergleich zugelassen alle Funktionen, die sämtliche Gleichgewichtsbedingungen (Differentialgleichung und freie Randbedingung) erfüllen.

Sind alle Zwangsverschiebungen Null, fällt C weg, und es bleibt

$$- \Pi' = A_i \rightarrow \text{Min.}, \quad (28')$$

der bekannte Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit (genauer formuliert: Minimum der Ergänzungsarbeit; solange das Hookesche Gesetz gilt, ist diese aber gleich der Formänderungsarbeit). Ist die Platte außerdem noch μ -frei gelagert, lassen sich die Bedingungsgleichungen einfacher schreiben in der Form

$$\frac{1}{K} A(w, w_k) = \int_F \Delta w \Delta w_k dF = \oint \left(\frac{\partial w}{\partial n} \Delta w_k - w \frac{\partial \Delta w_k}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (29)$$

Diese Formel hat bereits Wegner⁸ aufgestellt und verwendet.

Sind die Zwangsverschiebungen Null, beträgt der Extremwert

$$\Pi'_{\max} = -A_i(w_0 + \eta) = -\frac{1}{2} [A(w_0, w_0) + A(w_0, \eta)] = -\frac{1}{2} A(w_0, w). \quad (30)$$

Für die wahre Lösung w^* ist $\Pi = \Pi'$. Das folgt einerseits daraus, daß wir in (20) nur Glieder hinzugefügt haben, die für die wahre Lösung verschwinden. Es ergibt sich aber auch, wenn man (14) und (28) voneinander subtrahiert:

$$\Pi - \Pi' = 2 A_i - (\bar{C} + \bar{C}).$$

Addiert man die Endwertarbeiten der eingepprägten Kräfte und der Zwangsverschiebungen, erhält man die gesamte äußere Endwertarbeit; für die wahre Lösung ist sie gleich der inneren Endwertarbeit, und diese (mit dem Hookeschen Gesetz) gleich der doppelten Formänderungsarbeit; daher gibt die obige Differenz Null.

Der Wert Π^* für die wahre Lösung genügt also der Ungleichung

$$\Pi'_{\max} \leq \Pi^* \leq \Pi_{\min}$$

und daher kann die Differenz $\Pi_{\min} - \Pi'_{\max}$ als ein Maß dafür gelten, wie nahe zwei bestimmte Näherungslösungen nach den beiden Methoden an der wahren Lösung liegen.

Anhang: Analytischer Beweis für die Äquivalenz der Ausdrücke (6) und (13).

Wir gehen aus von der Form (13):

$$A(w, \eta) = K \int_F \eta \Delta w dF + \oint q(w) \eta ds - \oint m(w) \frac{\partial \eta}{\partial n} ds + \sum_{r, r'} P(w) \eta. \quad (a)$$

Das zweite Integral ergibt nach (3a):

$$\oint q(w) \eta ds = -K \oint \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] \eta ds.$$

Auf das zweite Glied darin wenden wir Produktintegration an:

$$\oint q(w) \eta ds = -K \left\{ \oint \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \eta ds + (1 - \mu) \left[\sum_{r, r'} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \cdot \eta \right]_{s_r + 0}^{s_r + 1 - 0} - \oint \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} ds \right\}. \quad (b)$$

Die Summe in (a) beträgt nach (3c):

$$\sum_{r, r'} P(w) \eta = -K (1 - \mu) \sum_{r, r'} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \cdot \eta \Big|_{s_r - 0}^{s_r + 0}.$$

Das kompensiert gerade die Summe in (b) und wir erhalten

$$\oint q(w) \eta ds + \sum_{r, r'} P(w) \eta = -K \oint \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} \eta - (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \frac{\partial \eta}{\partial s} \right] ds. \quad (c)$$

⁸ Wegner: Eine neue Methode zur approximativen Lösung von Spannungsproblemen bei Platten und Scheiben. Forschungsh. Stahlbau 6, 183—189 (1943).

Wir haben damit die Arbeit der Kirchhoffschen Ersatzscherkräfte zurückgeführt auf die Arbeit der ursprünglichen Drillmomente.

Ferner ist nach (3b):

$$\oint m(w) \frac{\partial \eta}{\partial n} ds = -K \oint \left[\mu \Delta w + (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial n} ds \quad (d)$$

und schließlich nach dem Greenschen Satz:

$$K \int_F \eta \Delta \Delta w dF = K \left\{ \int_F \Delta w \Delta \eta dF + \oint \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial n} \eta - \Delta w \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) ds \right\}. \quad (e)$$

Somit ergibt die Summe (c) - (d) + (e):

$$A(w, \eta) = K \left\{ \int_F \Delta w \Delta \eta dF + (1 - \mu) \oint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial n} - \Delta w \frac{\partial \eta}{\partial n} \right] ds \right\}.$$

Der Integrand des Randintegrals läßt sich auch schreiben in der Form:

$$\begin{aligned} J &= n \cdot [(\nabla; \nabla w) \cdot \nabla \eta - \Delta w \nabla \eta] \\ &= n \cdot [\nabla \times (\nabla w \times \nabla \eta)] = (n \times \nabla) \cdot (\nabla w \times \nabla \eta), \end{aligned}$$

worin das Komez-Zeichen unter $\Delta \eta$ bedeutet, daß die übrigen Nabla auf dieses Glied nicht anzuwenden sind. Benützen wir nun wieder die Identität

$$n \times \nabla = \frac{\partial}{\partial s},$$

ergibt sich

$$J = \frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla \eta$$

und damit

$$A(w, \eta) = K \left\{ \int_F \Delta w \Delta \eta dF + (1 - \mu) \oint \left(\frac{\partial \nabla w}{\partial s} \times \nabla \eta \right) ds \right\}$$

übereinstimmend mit (6).

Zusammenstellung der Formeln.

Die Lösung der Plattengleichung wird angesetzt in der Form

$$w = w_0 + \sum c_k w_k.$$

Die w_k sind bei den einzelnen Methoden verschiedenen Bedingungen unterworfen, und die c_k sind dementsprechend aus verschiedenen Extremalprinzipien zu bestimmen. Die einzelnen Fälle gliedern sich folgendermaßen:

keine Bedingung erfüllt: (23b)

	Zwangsbedingungen erfüllt (Ritz) (17)	Differentialgleichung erfüllt (25)
freie Randbedingungen erfüllt (Galerkin) (17')	eingeprägte Randkräfte = 0 und μ -freie Lagerung (17'')	freie Randbedingungen erfüllt (27)
		Zwangsverschiebungen = 0 und μ -freie Lagerung (Wegner) (29)

Dementsprechend entstehen die Gleichungen aus der allgemeinsten Form durch Wegstreichen jener Glieder, die wegen der Erfüllung einzelner Bedingungen identisch verschwinden:

Differentialgleichung

$$\int_F w_k (K \Delta w - p) dF \leftarrow (17') \quad (17)$$

freie Randbedingungen

$$+ \int_{\mathfrak{A}} [R(w) - \bar{R}, w_k] ds \leftarrow (23b)$$

Zwangsbedingungen

$$- \int_{\mathfrak{A}} [R(w_k), w - \bar{w}] ds \leftarrow (27) \quad (25)$$

Vor einer anderen Darstellung stammen dagegen die beiden Formeln für μ -freie Lagerung:

$$\int_F \left(\Delta w \Delta w_k - \frac{p}{K} w_k \right) dF = 0, \quad (17''')$$

$$\int_F \Delta w \Delta w_k dF = 0. \quad (29)$$

(Eingegangen am 26. Januar 1953.)

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz.

Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen*.

Von Adolf G. Smekal.

Mit 14 Textabbildungen.

Inhalt:

1. Einleitung. Plastisches und sprödes Stoffverhalten.
2. Bedingungen des Brucheintrittes unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen.
3. Brucheintritt bei kreiszylindrischen Biegestäben mit sprödem Stoffverhalten.
4. Verhältnis von Biegefestigkeit und Zugfestigkeit für Zylinderstäbe mit sprödem Stoffverhalten.
5. Zeitlicher Verlauf des Bruchvorganges von kreiszylindrischen Zugstäben mit sprödem Stoffverhalten.
6. Mechanismus der Bruchauslösung und Bruchfortpflanzung bei sprödem Stoffverhalten unter einachsiger Beanspruchung.
7. Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter mehrachsigen Beanspruchungen. Experimentelle Unterlagen von Emil Eberle und Franz Puchegger.

Zusammenfassung. Das Anwendungsgebiet der Mechanik homogener Kontinua betrifft nur Volumeneigenschaften der Festkörper, daher versagt sie bei der Wiedergabe von Brucherscheinungen. Wie für homogene Stoffgebiete experimentell besonders geprüft und bestätigt wurde, sind bei wirklich homogenen Festkörpern an Stelle von Bruchvorgängen nur Plastizitätserscheinungen nachweisbar.

Die Beschreibung von Brucherscheinungen erfordert die Anwendung einer Mechanik inhomogener Kontinua. Auch der Grenzfall spröden Stoffverhaltens wird grundsätzlich nur in Bereichen inhomogenen Stoffaufbaues verwirklicht gefunden. Die Auslösung von Bruchvorgängen erfolgt hierbei an Inhomogenitätsstellen von stoffspezifischer Beschaffenheit. Für Silikatgläser wird im besonderen gezeigt, daß ihre zur Bruchauslösung geeigneten Inhomogenitätsstellen Eigenspannungsstellen mit Kerbwirkung sind, welche statistische Verteilungseigenschaften besitzen und keine merklichen Beeinflussungen aufeinander ausüben.

Das quasi-statische Verhalten des mit diesen Eigenschaften ausgestatteten inhomogenen Kontinuums liefert eine qualitativ zutreffende Wiedergabe aller mit den Orten des Bruchbeginnes und dem Anfangsverlauf der Bruchfortpflanzung zusammenhängenden Aussagen im Falle der einachsigen Beanspruchungen des Biege- und Zugversuches an

* A. Nadai zum 70. Geburtstage zugeeignet.

Rundstäben. Dazu gehören Beobachtungsergebnisse über die statistische Verteilung der Bruchbeginnorte im Biegeversuch, das Verhältnis von Biege- und Zugfestigkeit sowie die Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Probenlänge und vom Probendurchmesser.

Der zeitliche Verlauf der Bruchfortpflanzung im homogenen Zugversuch ist durch Vermessung auf den Bruchflächen hervorgebrachter Ultraschallspuren ermittelt worden. Die zeitlich träge, spannungsthermische Anlaufphase der Bruchfortpflanzung beginnt mit sehr kleinen Geschwindigkeiten und hängt ab von der Versuchsgeschwindigkeit, von der Temperatur und von der Individualität der bruchauslösenden Inhomogenitätsstelle. Die stationäre, athermische Endgeschwindigkeit der Bruchfortpflanzung dagegen ist von gleicher Größenordnung wie die Geschwindigkeit der transversal-elastischen Wellenfortpflanzung und bildet eine Stoffkonstante. Der Zeitbedarf beider Phasen der Bruchentwicklung unterscheidet sich um viele Größenordnungen (z. B. $10^7:1$) und bestimmt alle mit der Dynamik der Bruchfortpflanzung zusammenhängenden Erscheinungen, wie die Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Versuchsgeschwindigkeit, die Formen von Sekundärbruchumrissen auf Primärbruchflächen (Hyperbel, Stromlinienprofil), die sehr geringe Häufigkeit im Stabinneren verlaufender Bruchvorgänge. Hierbei zeigt sich, daß das makroskopische Bruchgeschehen grundsätzlich als Ergebnis der zeitlichen Konkurrenz zwischen einer Mehrzahl von Einzelvorgängen aufzufassen ist, die an verschiedenen Inhomogenitätsstellen ausgelöst werden und das seltene Auftreten doppelter Brüche zur Folge haben.

Bruchvorgänge, die in mehrschsig beanspruchte Stoffgebiete eindringen, erzeugen daselbst von Inhomogenitätsstellen ausgehende gefaltete Sekundärbruchflächen (Lanzettbrüche), die eine Profilierung der Primärbruchflächen hervorbringen und nur als dynamische Bildungen verständlich sind.

Summary. Mechanics of homogeneous solids applies to volume properties only and fails, therefore, to describe break phenomena. Instead of breaking processes, really homogeneous solids reveal but plasticity phenomena, as we have secured by proper experiments.

Hence any theory of breaking phenomena must be related to the mechanical behaviour of an inhomogeneous continuum. This proves true especially in the simple limiting case of brittleness. Here the beginning of fracture processes takes place on spots of inhomogeneity, the quality of which depends from the substances used. For silicate glasses it is demonstrated that these spots are centres of self-stressings, which are able to concentrate locally outer stresses too, and which do not influence each other sensibly. Furthermore, this special type of flaws is characterized by statistically distributed properties.

The quasi-static behaviour of a solid with such flaws qualitatively accounts for all facts connected with the locations of fracture origins and with the orientation of the beginning of crack propagation for uniaxial stressing in bending or tensile experiments with cylindrical rods. In this respect results are mentioned on the statistical distribution of fracture origins in flexure experiments, on the relation between bending and tensile strength, and on the dependence of tensile strength upon specimen length and rod diameter.

The time progress of crack propagation during uniform tensile experiments has been measured by means of the traces of ultrasonics on the fracture surfaces. The initial phase of crack propagation depends on a cooperation of fluctuations of thermal energy and stress concentration along the fracture front; it begins with very slow velocities and varies with the rate of loading, the temperature and the individuality of the primary flaw. On the contrary, the terminal phase of crack propagation is of athermic nature; its high velocity proved to be a material constant of the same order of magnitude as the propagation velocity of transversal elastic waves. Therefore, the durations of both phases are differing by many powers of ten (e. g. $10^7:1$). This accounts for all phenomena connected with the dynamics of crack propagation, especially the dependence of tensile strength from the loading rate; the shapes of secondary fracture contours on primary fracture surfaces (hyperbolae, stream-line profiles), the very low frequency of break processes passing fully inside of the specimens. Furthermore, time phenomena reveal the necessity to consider macroscopic breakage as the result of a contest among a plurality of single processes starting on different weak spots of inhomogeneity. An interesting justification of this view is given by the very small frequency of double-fractures.

Entering polyaxially stressed areas, break processes may produce specially folded secondary fractures (lancet-fractures) starting again on spots of inhomogeneity. They are profiling the primary fracture surfaces and may be understood only from the dynamical circumstances of their origins.

Résumé. La mécanique des solides continus et homogènes ne s'applique qu'à des propriétés de volume et faillit donc pour les phénomènes de rupture. En effet, on a établi par des expériences, que des solides réellement homogènes montrent seulement des phénomènes de plasticité au lieu des événements de rupture.

C'est pourquoi que chaque théorie des phénomènes de rupture doit partir des solides continus mais inhomogènes, particulièrement en cas de limite des matériaux cassants. Ici, chaque rupture commence au lieu d'une inhomogénéité des qualités différentes selon la nature spéciale des matières envisagées. En cas des verres siliceux on a démontré que ces lieux d'inhomogénéité sont des centres des tensions élastiques intérieures, centres, qui ont le pouvoir de concentrer des tensions élastiques extérieures aussi et qui n'exercent pas des influences mutuelles sensibles. De plus ces centres sont caractérisées par des qualités statistiquement distribuées.

La connaissance de l'état quasi-statique d'un tel solide inhomogène suffit de rendre compte d'une manière qualitative de tous les faits sur la localisation des origines des cassures et sur l'orientation originaire des ruptures en cas de la flexure ou de la traction des bâtons cylindriques. Ces conséquences sont illustrées par des résultats sur la distribution statistique des origines de rupture enregistré dans des expériences de flexure; par la relation entre la résistance à la flexure et à la traction; enfin par l'influence de la longueur et du diamètre des spécimens sur la résistance à la traction.

En cas de l'uniforme traction la vitesse de la propagation de rupture avait été mesuré au moyen des marques courbées, tracées sur les surfaces des cassures par des choc-ondes ultrasoniques. La phase initial de propagation est déterminée par la coopération des fluctuations de l'énergie thermique et de la concentration de l'énergie élastique le long du front avançant de la cassure; par conséquent, cette phase commence avec des vitesses très basses et dépend de la progression de la charge de l'expérience, de la température et de l'individualité de l'origine de la rupture. Au contraire, la phase terminale de la propagation de rupture est fondamentalement athermique; leur vitesse est très haute et constante, du même ordre de grandeur comme la vitesse de la propagation des ondes élastiques transversales. Les durées des deux phases diffèrent donc énormément (p. e. $10^7:1$). Les conséquences de ce fait influencent tous les phénomènes liés à la dynamique de la propagation des ruptures: la dépendance de la résistance à la traction de la progression de la charge de l'expérience; les figures des contours des cassures secondaires sur les cassures primaires (hyperboles, profils aérodynamiques); la fréquence très basse des ruptures, qui sont développées entièrement dans l'intérieur des spécimens. Finalement, la rupture macroscopique est considérée comme résultat d'un concours entre un grand nombre de ruptures individuelles, procèdent dans tous les parties du spécimen. Une justification intéressante de cette vue est l'existence d'une fréquence très basse pour la formation simultanée des double-ruptures.

Si une cassure avançante entre dans une partie de volume, déformé par deux tensions principales de traction à la fois, on a observé la formation d'un nouveau type de cassure secondaire pliée (rupture de lancette). La cassure primaire est donc profilée par ces nouvelles surfaces secondaires. Leurs propriétés spéciales ne peuvent être compris qu'en raison des circonstances dynamiques de leur formation.

1. Einleitung. Plastisches und sprödes Stoffverhalten.

Die von A. Nadai so entscheidend geförderte Beherrschung des phänomenologischen Plastizitätsverhaltens der Werkstoffe hat sich zu einem selbständigen Teilgebiet der allgemeinen Mechanik der Kontinua entwickelt. Wie im Bereiche des Elastizitätsverhaltens der Kontinua reichen zur Beschreibung dieser überelastischen Volumen Vorgänge wenige phänomenologische Stoffgrößen oder Stofffunktionen aus und reichten damit die idealisierende Einfachheit seiner Grundannahmen.

Betrachtet man demgegenüber den anderen Grenzfall überelastischer Vorgänge, das Sprödeverhalten von Stoffen, dann zeigt sich, daß ein homogenes Kontinuum zu seiner Beschreibung nicht ausreicht, weil dabei keine Volumenerscheinungen mehr vorliegen. Jeder Bruchvorgang beginnt an irgendeiner Stelle des Körperinneren oder der Körperoberfläche und umfaßt auch nach seiner zeitlichen Vollendung nur eine flächenhafte Mannigfaltigkeit von Körperpunkten. Die Auszeichnung solcher Orte stellt ein dem homogenen Kontinuum grundsätzlich fremdes Begriffselement dar, so daß jede allein aus der Kontinuumsmechanik versuchte Aussage über Brucherscheinungen ungeklärte Grundlagen besitzt.

Eine versuchsmäßige Prüfung dieser Bedenken war bisher unausführbar, weil alle wirklichen Festkörper in Bereichen normaler Abmessungen inhomogenen Bau aufweisen. Indes gelingt es, entweder durch Herabsetzung der Probenabmessungen

(vgl. Nr. 4) oder durch Verkleinerung der beanspruchten Raumteile herabzugehen unter die Größenordnung der mittleren Entfernung zwischen benachbarten Inhomogenitätsstellen, die bei zahlreichen einheitlichen Stoffen um 10^{-3} cm oder 10 Mikron gelegen ist. Während der zur technischen Härtebestimmung angewendete Eindruck- oder Ritzversuch bei Stoffen, wie Silikatgläsern, Quarz, Korund, Borkarbid, stets mit Brucherscheinungen verbunden ist, erhält man bei allen diesen Musterbeispielen normalen Sprödverhaltens nur mehr bruchfreie Eindringspuren, sobald die benutzten Kontaktflächen kleiner als ein Quadratmikron gewählt werden¹. Dabei handelt es sich um Abmessungen ($5 \cdot 10^{-5}$ cm), die noch immer sehr groß sind, verglichen mit der Größenordnung der Molekularabstände ($3 \cdot 10^{-8}$ cm), so daß die Anwendung der Kontinuumsvorstellung auch hier noch unbedenklich bleibt². Somit erscheint jetzt auch durch den Versuch entschieden, daß homogene Kontinua unter den gleichen Verformungsbedingungen, die inhomogene Kontinua in Teilkontinua zerlegen, Kontinua verbleiben und nicht in Teilkontinua aufgebrochen werden³.

Sprödes Stoffverhalten, auch in der Form kristalliner Spaltbarkeit, ist demnach grundsätzlich an die Wirksamkeit von Inhomogenitätsstellen geknüpft⁴. Die Funktion solcher Stellen besteht in der Konzentrierung elastischer Energie durch Kerbwirkung, womit der für einen Bruchbeginn erforderliche Betrag an Oberflächenenergie an derartigen Orten und nur an ihnen aufgespart wird. Das Fortbestehen dieses Mechanismus der Energiekonzentrierung ist für das Fortschreiten der Front des Bruchflächenspaltes auch im weiteren Verlauf des Bruchvorganges wesentlich (Nr. 5). Ohne ihn bleibt die Aufspeicherung der elastischen Verformungsarbeit ein Volumenvorgang, der schließlich, in Übereinstimmung mit unseren Versuchen, im Volumenvorgang einer Plastizitätserscheinung betätigt wird⁵.

2. Bedingungen des Brucheintrittes unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen.

Die Mannigfaltigkeit der im Anschluß an die Mechanik homogener Kontinua versuchten Bruchtheorien beleuchtet ihre Schwierigkeiten, die Anwendungsbereiche

¹ W. Klemm und A. Smekal: *Naturwiss.* **29**, 688, 710, 769 (1941) (Silikatgläser, Quarz, Korund). A. Smekal und W. Klemm: *Mh. Chem.* **82**, 411 (1951) (Silikatgläser, Plexiglas). A. Smekal und A. Starzacher: *Anz. Österr. Akad.* **1951**, 348 (Silikatglas). A. Smekal und F. Puchegger: *Österr. Chemiker-Ztg.* **53**, 273 (1952); *Powder Met. Bull.* **1953** (im Erscheinen) (Korund, Wolframkarbid, Siliziumkarbid, Borkarbid). Vgl. auch analoge Versuchsergebnisse an Kalkspat bei F. Puchegger und A. Smekal: *Anz. Österr. Akad.* **1951**, 350. F. Puchegger: *Naturwiss.* **39**, 428 (1952). — Die Auflösung der benutzten lichtoptischen Nachweismittel (Phasenkontrast, Mikrointerferometrie) hat sich in allen Fällen als ausreichend erwiesen. Erste übermikroskopische Kontrolle der Abwesenheit von Brucherscheinungen bei Th. Marx, W. Klemm und A. Smekal: *Naturwiss.* **31**, 143 (1943).

² Die Homogenität der geprüften Stoffbereiche ergibt sich dabei einerseits aus der Gleichförmigkeit der nachgewiesenen plastischen Stoffverschiebungen und des überwundenen Stoffwiderstandes, andererseits aus der Konstanz des spezifischen Stoffwiderstandes und der Feststellung, daß sein Betrag einer unmittelbaren athermischen Überwindung der chemischen Bindekräfte des Stoffes entspricht. Letzterer Umstand sichert überdies das Fortbestehen des gleichen Plastizitätsmechanismus für den sublichtmikroskopischen Auflösungsbereich.

³ Molekularphysikalisch betrachtet, enthält diese Feststellung naturgemäß Aussagen über das Verhältnis der Reichweite der Wirkungen der Inhomogenitätsstellen zur Reichweite der Molekularkräfte.

⁴ Vgl. etwa A. Smekal: Über die Mikrostruktur der Festkörper. *Jb. Akad. Mainz* **1950**, 200; *Acta Phys. Austr.* **4**, 313 (1950); Symposium Göteborg **1952** (im Erscheinen).

⁵ Gegenüber dieser den Elastizitätsbereich eines echt-homogenen Festkörpers begrenzenden Plastizitätserscheinung betrifft die phänomenologische Plastizitätstheorie grundsätzlich Eigenschaften echt-inhomogener Körper, die durch Vorhandensein von Inhomogenitätsstellen besonderer Beschaffenheit ein quasi-homogenes Plastizitätsverhalten ermöglichen.

dieser Ansätze aus ihren Voraussetzungen abzuleiten. Nach dem Vorstehenden müssen legitime Aussagen über die Bedingungen des Brucheintrittes Vorhandensein und Beschaffenheit von Inhomogenitätsstellen vorweg berücksichtigen, was in der Plastizitätstheorie formell nicht benötigt wird⁵. Ersteres hätte vom Spezialfall der Griffithschen Bruchtheorie aus als bekannt vorausgesetzt werden können⁶. Die Unzulänglichkeit des Griffithschen Modells für Inhomogenitätsstellen⁷ belegt jedoch die Notwendigkeit, von allzu bestimmten Modellvorstellungen abzusehen und aus der beobachtbaren Abhängigkeit der Brucherscheinungen von ein- und mehrachsigen Beanspruchungen auf die Beschaffenheit der Inhomogenitätsstellen der untersuchten Stoffe zurückzuschließen.

Die große Mannigfaltigkeit stofflicher Verhaltensweisen, die durch Anwendung von synthetischen organischen Werkstoffen, von Sinterkörpern und Hartmetallen an Aktualität gewonnen hat, liefert unverkennbare Hinweise darauf, daß die Inhomogenitätsstellen verschiedener Stoffarten keineswegs einheitlichen Bau besitzen, sondern von der Natur der beteiligten chemischen Bindekräfte, den chemischen Verunreinigungen und den Herstellungsbedingungen der Feststoffe abhängen⁸. Daher erfordert selbst eine Behandlung des Grenzfalles rein spröden Stoffverhaltens ein bewußtes Zusammenwirken der allgemeinen Mechanik der Kontinua und der stoffspezifischen Materialforschung.

Die vorliegende Arbeit unternimmt es, dies an der Stoffgruppe der Silikatgläser zu erläutern, welche den Vorzug der Isotropie besitzt und gleichzeitig dem Idealfall spröden Stoffverhaltens desto weitgehender entspricht, je tiefer die Versuchstemperatur unterhalb der thermischen Erweichungsgebiete gelegen ist. An diesen verhältnismäßig bequemen Objekten kann gezeigt werden, daß der Bruch-eintritt selbst in einfachsten Beispielen mit Orten rechnerischer Maximalbeanspruchung unmittelbar nicht zusammenhängt (Nr. 3, 4), daß eine Kenntnis der Dynamik des Bruchverlaufes für die Beurteilung der Bedingungen des Brucheintrittes wesentlich ist (Nr. 5, 6) und auch für ein Verständnis des Einflusses mehrachsiger Beanspruchungen unerlässlich sein kann (Nr. 7).

Zur Behandlung dieser Fragen genügt es, die Bruchflächen im wesentlichen als stetige Flächen aufzufassen und davon abzusehen, daß sie wegen des inhomogenen Baues der betrachteten Stoffe gleichfalls eine verwickelte Struktur besitzen müssen. Ihr Feinbau besteht aus dichten Folgen von Bruchflächenelementen, deren Bildung durch ihnen zeitlich und lagemäßig vorangegangene ähnliche Zwischenglieder des Bruchgeschehens ausgelöst wurde und die ihrerseits weitere solche Teilvorgänge veranlassen. Die Ausbreitung jedes Bruchvorganges besteht demnach in der dauernden Hervorbringung von „Sekundär“brüchen, deren Facetten im allgemeinen durch eine stetige Großfläche angenähert werden können. Empirisch gilt dies vor allem von den lichtoptisch glatt erscheinenden Bruchflächengebieten, deren Entstehungsbedingungen im folgenden allein Gegenstand der Untersuchung sind.

Diese Grenzziehung dient nicht nur einer Beschränkung des Umfanges der hier darzubietenden Betrachtungen — im wesentlichen umschreibt sie auch jenen Er-

⁵ A. A. Griffith: Trans. Roy. Soc., Ser. A **221**, 163 (1920); Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924, S. 55. — K. Wolf: Z. angew. Math. Mech. **3**, 107 (1923). — A. Smekal: Kohäsion der Festkörper, in Auerbach-Hort: Handbuch der Mechanik, Bd. IV/2, S. 1 bis 153, 1931, Z. Physik **103**, 495 (1936), sowie Festigkeitseigenschaften spröder Körper. Ergebn. exakt. Naturwiss. **15**, 106—188 (1936).

⁷ Wie z. B. die übermikroskopischen Untersuchungen von Glasoberflächen und Bruchflächen gezeigt haben, enthalten die Silikatgläser keine den Abmessungen Griffithscher Risse vergleichbare Inhomogenitätselemente. Vgl. auch A. Smekal: Glas Tekn. Tidskr. **7**, 147 (1952).

⁸ Vgl. A. Smekal: Jb. Akad. Mainz **1950**, 200, ferner Acta Phys. Austr. **6**, 228 (1952) und Vortrag am I. Plansee-Seminar Reutte/Tirol 1952 (im Erscheinen).

scheinungsbereich, zu dessen Verständnis eine quasi-statische Kontinuumsmechanik inhomogener Stoffe ausreicht. Merkliche Abweichungen der Sekundärbruchfacetten von einem einheitlichen Bruchflächenverlauf sind meist auf das Hinzutreten dynamischer Beanspruchungen in den Gebieten der Sekundärbruchauslösung zurückführbar. Das Vordringen des Bruchspaltes bewirkt ja nicht nur örtliche Veränderungen, sondern auch weiterreichende elastische Ausgleichsvorgänge im beanspruchten Probekörper, welche mit den hohen Ausbreitungsgeschwindigkeiten longitudinaler und transversaler Wellenerscheinungen vor sich gehen. Eine Rückwirkung solcher elastischer Wellenfelder auf den weiteren Bruchfortschritt besteht nur, wenn geeignet reflektierende Flächen der Körperbegrenzung vorhanden sind und wenn die zurücklaufenden Wellen genügend Energie besitzen. Die von ihnen beeinflussten Brucherscheinungen sind demnach von der Probenform abhängig und daher von dem im folgenden allein behandelten Bruchgeschehen grundsätzlich experimentell abtrennbar, wie für kreiszylindrische Zugstäbe auch bestätigt wurde⁹.

Ein weiteres bemerkenswertes Kennzeichen der durch Zusatzbeanspruchungen entstehenden Brucherscheinungen besteht darin, daß sie bei übereinstimmender Symmetrie von Probenform und Beanspruchungsart Gabelungen des Bruchverlaufes hervorbringen können, welche die Entstehung einer Mehrzahl von Bruchstücken zur Folge haben. Dieser für die Bruchmechanik des spröden Stoffverhaltens besonders charakteristische Sachverhalt tritt bereits bei kreiszylindrischen Zug- und Biegestäben auf¹⁰. Er stellt ein weiteres Beispiel gewissermaßen alltäglicher Brucherscheinungen dar, die den von der Mechanik homogener Kontinua ausgehenden Bruchhypothesen unzugänglich geblieben sind.

3. Brucheintritt bei kreiszylindrischen Biegestäben mit sprödem Stoffverhalten.

Die am stärksten zuggespannte Faser des zylindrischen Biegestabes scheint das einfachste Beispiel dafür darzustellen, daß der Bruchbeginn, wie immer auch die Bruchbedingung lauten möge, an Orten maximaler Beanspruchung erwartet werden müsse. Daran wird auch nichts geändert, wenn mit der Möglichkeit gerechnet würde, daß das Biegemoment verschiedener Stabquerschnitte nicht unveränderlich beschaffen ist; nach wie vor sind es wenigstens bestimmte Teilbereiche der stärkst gedehnten Erzeugenden, die von vornherein durch Maximalbeanspruchung gegen ihre Nachbarschaft ausgezeichnet sind. Eine Überprüfung der Erwartung, daß der Ort des Bruchbeginnes stets auf der stärkst gespannten Faser liegen müsse, scheint bisher als überflüssig gegolten zu haben.

Die von uns ausgeführten Biegeversuche erstreckten sich auf mehrere hundert Glas- und Porzellanstäbe von rund 6 mm Durchmesser und 100 mm freier Durchbiegelänge, wobei die Biegebeanspruchung mittels zweier symmetrisch zu den Auflagerschnitten wirkenden Belastungsschnitten bei stets gleichbleibender Geschwindigkeit

⁹ Die Wirksamkeit der Wellenreflexion kann auch beeinflußt werden durch Verlangsamung der Bruchfortpflanzung oder durch Veränderung des Reflexionsvermögens der Stabwandungen. Die auf der Zugbruchfläche von Abb. 5 vorhandenen Rauigkeiten und groben Sekundärbruchflächen bleiben aus, wenn der Zugversuch anstatt mittels axialer Zugbelastung durch Mantel-druck in einer flüssigkeitsgefüllten Druckkammer vor sich geht, aus der die Stabenden mittels Stopfbuchsen beanspruchungsfrei herausgeführt sind, vgl. Abb. 12. Welche der beiden ange-deuteten Möglichkeiten dabei verwirklicht sind, wurde bisher nicht geprüft. Die beiden Ab-bildungen sind noch unveröffentlichten, unter möglichst vergleichbaren Bedingungen ausge-führten Versuchen von G. Apelt (1945) entnommen, welche die Übereinstimmung der mittleren Zerreißfestigkeiten des Stabmaterials für beide Versuchsarten ergeben haben.

¹⁰ Vgl. A. Smekal: J. Soc. Glass Technol. **20**, 432 (1936); Glastechn. Ber. **15**, 259 (1937); ferner Ergebn. exakt. Naturwiss. **15**, 106 (1936), Abbildungen auf S. 141.

der Lastzunahme erschütterungs- und stoßfrei übertragen wurde¹¹. Die statistische Verteilung der Bruchquerschnitte über die Stablänge entsprach der Symmetrie des Belastungsverfahrens, wobei eine schwache Abnahme des Biegemoments beiderseits des mittleren Stabquerschnittes angedeutet war. Der makroskopische Anfangsverlauf der Bruchflächen ist stets senkrecht zur Staboberfläche gerichtet. Er bildet ein spiegelnd glattes Gebiet, dessen Inneres an dem mit der Staboberfläche entstandenen Rande den Bruchbeginn aufweist, welcher an einer geringfügigen, individuellen örtlichen Abweichung der Bruchfläche von der „Spiegel“ebene erkennbar ist (Abbildung 1). Es war daher möglich, die Lage des Bruchanfanges bezüglich der stärkst gedehnten Oberflächenfaser festzulegen und durch jenen Winkel φ auszudrücken, der innerhalb des kreisförmigen Stabquerschnittes zwischen den Radien entsteht, die vom Kreismittelpunkt aus nach dem Ort des Bruchbeginnes und nach jenem der größten Biegezugspannung gezogen werden können (Abb. 2a)¹². Die Verteilung dieser Winkel erwies sich als unabhängig von der Lage des Bruchquerschnittes bezüglich der Belastungsschneiden, so daß eine Zusammenfassung aller beobachteten Winkel in einem einzigen Häufigkeitsdiagramm möglich war (Abb. 2b). Glas- und Porzellanstäbe zeigten hierbei keine nennenswerten Verschiedenheiten.

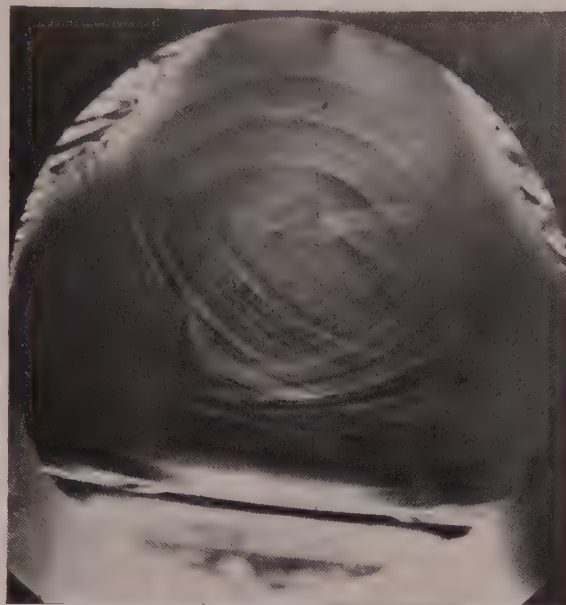


Abb. 1. Biegebruchfläche eines Rohglasstabes bei mikroskopischer Hellfeld-Durchlicht-Beleuchtung. Abbildungsmaßstab 15:1 (H. Wallner, 1938). — Die Bildebene entspricht dem ebenen Teile des spiegelnden Bruchflächenbereiches, der sich um die in der unteren Bildhälfte unscharf abgebildete „Biegekante“ abwärts wölbt. Die stärkst gedehnte Faser entspricht dem von der Biegekante abgewendeten Ende des senkrecht zu ihr gezogenen Kreisdurchmessers des abgebildeten Bruchquerschnittes; daneben, in geringem Abstand, der Ort des Bruchbeginnes. Beiderseits des „Spiegels“ je ein von gröberen Sekundärbrüchen erfülltes und von „feiner Rauigkeit“ umgebenes sichelartiges Gebiet, das in den „Spiegel“ gekrümmte Ultraschallspuren entsendet (natürliche Wallner-Linien, vgl. Nr. 5). Durch den „Spiegel“ hindurch ist der vom Herstellungsvorgang herrührende schalenartige Bau des Stabinneren sichtbar.

Man erkennt, daß nicht nur keine statistische Bevorzugung der stärkst gedehnten Faser durch die Orte des Bruchbeginnes vorliegt, sondern daß für diese Lage ein ausgesprochenes Häufigkeitsminimum besteht, welches kleiner als 1% gefunden wurde. Die größte Häufigkeit der Bruchbeginne liegt bei $\pm 11^\circ$ seitlich der stärkst gespannten Faser, die größte Winkelentfernung kann bis zu $\pm 45^\circ$ ansteigen.

Diese Ergebnisse zeigen also keine direkte, sondern eine nur statistische Abhängigkeit der Lagen des Bruchbeginnes von der Spannungs-

¹¹ Die Versuche wurden 1944/45 im damaligen Institut des Verfassers in Halle-Zörbig von Dr. Ernst Ullmann ausgeführt. Hinweise auf ihre Ergebnisse bei A. Smekal: J. Soc. Glass Technol. **32**, 378 (1948); Glastechn. Ber. **23**, 186 (1950).

¹² Wegen der unveränderlichen Beziehung zwischen der Lage der stärkst gespannten Faser und der „Biege“kante der Biegebruchflächen (Abb. 1) ist es am einfachsten, zur Ermittlung der Winkel φ von der Lage der Biegekanten auszugehen.

verteilung des homogenen Biegestabes; jeder Einzelbruch wird vor allem durch die besonderen Eigenschaften der seinen Anfangsort bestimmenden Inhomogenitätsstelle festgelegt. Erst die Anfangsorientierung der spiegelnden Bruchflächengebiete (Abb. 1) folgt stets der Spannungsverteilung des homogenen Biege-

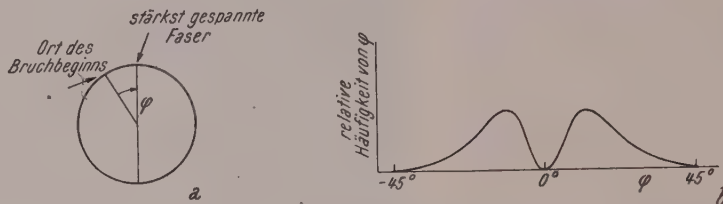


Abb. 2a. Definition des Winkels φ zur Kennzeichnung der Lage des Bruchbeginnes in bezug auf die stärkst gedehnte Faser.

Abb. 2b. Häufigkeitsverteilung des Winkelabstandes φ der Lage des Bruchbeginnes bezüglich der stärkst gedehnten Faser ($\varphi = 0$) von kreiszylindrischen Biegestäben aus Glas oder Porzellan.

stabes und liefert als allgemeine empirische Bedingung für die Bruchfortpflanzung die Richtung senkrecht zur größten Zugspannung im Biegestabe.

Für die abweichend orientierte unmittelbare Umgebung des Bruchbeginnes längs der Bruchfläche ergibt sich daraus, daß der Bruchverlauf an der ihn auslösenden Inhomogenitätsstelle unter der Mitwirkung einer zusätzlichen, örtlich individuellen

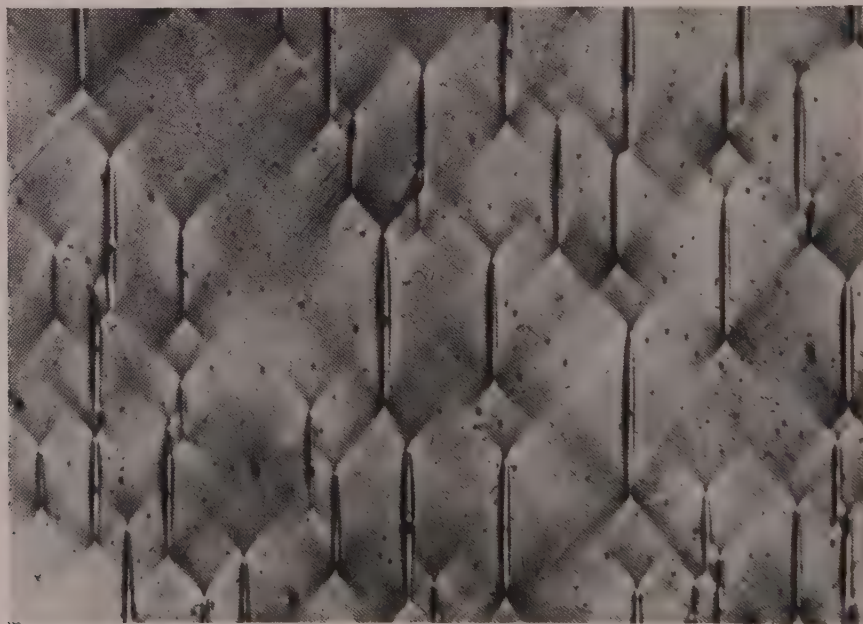


Abb. 3. Sichtbarmachung der Verteilung und Kerbwirksamkeit oberflächennaher Inhomogenitätsstellen im Modellversuch an Plexiglas. Panphot-Leitz, Auflicht-Hellfeld, Abbildungsmaßstab 680:1 (D. Wapler, 1945). — Anblick der ursprünglich vollkommen ebenen Formoberfläche eines Vierkant-Biegestabes nach Entlastung von 24stündiger Dauerbeanspruchung auf rund 80% der Biegebruchspannung. Das Versuchsmaterial ist unter diesen Bedingungen nur an Kerbstellen fließfähig und entwickelt grabenartige Einrisse senkrecht zur Richtung der maximalen Biege-Zugspannung, ausgehend von Inhomogenitätsstellen, die in den Grabenmitten gelegen und teilweise als dunkle Fremdstoffteilchen sichtbar sind. Die Flächendichte der wirksamen

Inhomogenitätsstellen dieses Modellstoffes ergibt sich hier zu $1,6 \cdot 10^5$ je cm^2 .

Spannungsverteilung vor sich geht, deren größte Zugspannung gegenüber der Nachbarschaft Eigenorientierung besitzt und eine ausgesprochene Spannungs„spitze“ darstellt. Inhomogenitätsstellen sind nun in der Tat stets dadurch gekennzeichnet, elastische Verspannungen zu verursachen und von äußeren Beanspruchungen hervorbrachte elastische Spannungen zu konzentrieren. Die bruchauslösenden Inhomogenitätsstellen der Silikatgläser besitzen demnach den allgemeinen Charakter von „Eigenspannungsstellen mit Kerbwirkung“¹³.

Die beobachtete statistische Häufigkeitsverteilung der Lagen der Bruchbeginne (Abb. 2b) kann qualitativ verstanden werden, wenn man annimmt, daß derartige Inhomogenitätsstellen in der Oberflächenschicht des Stabes mit einer bestimmten statistischen Flächendichte zugegen sind und auch bezüglich Orientierung und Stärke ihrer Selbstspannungsfelder sowie ihrer Kerbwirksamkeit statistische Verteilungseigenschaften besitzen. Verteilung und Kerbwirksamkeit derartiger Inhomogenitätsstellen können durch Modellversuche an zäh-fließfähigen Stoffen sichtbar gemacht werden (Abb. 3). Beim gebogenen Rundstab befinden sich Zugspannungen nur in der konvexen Stabhälfte, deren Oberfläche wegen $\varphi \leq 45^\circ$ jedoch nur zur Hälfte für Orte der Bruchauslösung in Betracht kommt. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird einerseits desto größer sein, je höher die Biegezugspannung an der Staboberfläche, andererseits desto geringer, je kleiner die Anzahl der verfügbaren Inhomogenitätsstellen bzw. die Größe des ihnen entsprechenden Bruchteiles der Staboberfläche. Dieser Bruchteil ist für die engste Nachbarschaft der stärkst gedehnten Faser ($\varphi = 0$) verschwindend klein, wodurch das Minimum der Häufigkeitsstatistik daselbst zustande kommt.

4. Verhältnis von Biegefestigkeit und Zugfestigkeit für Zylinderstäbe mit sprödem Stoffverhalten.

Von der Gesamtoberfläche des Biegestabes kann demnach nur etwa ein Viertel eine bruchauslösende Inhomogenitätsstelle liefern, wobei überdies zwei Winkelbereiche (um $\varphi = \pm 11^\circ$) statistisch bevorzugt sind. Beim gleichförmig gedehnten Zugstab mit übereinstimmenden Abmessungen kann die bruchauslösende Inhomogenitätsstelle dagegen von der Gesamtoberfläche geliefert werden, wobei alle Teile der letzteren von vornherein gleichbeansprucht sind. Damit werden drei Gründe dafür ersichtlich, daß unter sonst vergleichbaren Versuchsbedingungen und für sprödes Stabmaterial die mittlere Zugfestigkeit von der mittleren Biegefestigkeit stets nicht unbeträchtlich übertroffen wird¹⁴:

A. Den kleineren wirksamen Oberflächen der Biegestäbe entsprechen statistisch höhere und stärker streuende Zerreißspannungen an den Orten der Bruchauslösung.

B. Die ungleichförmige Verteilung der Biegezugspannungen bedingt eine vom Winkel φ abhängige Kerbwirksamkeit der um die Bruchauslösung konkurrierenden Inhomogenitätsstellen, wodurch statistisch wiederum höhere Zerreißspannungen am Ort des Bruchbeginnes begünstigt sind.

C. Die konventionelle („technische“) Biegefestigkeit wird nicht aus der für diese Orte der Bruchauslösung errechneten Nennspannungen der Bruchbeanspruchung gemittelt, sondern aus den für die stärkst gedehnte Faser ($\varphi = 0$) errechneten höheren Nennspannungen.

Bestimmt man im Sinne von C eine aus den Zerreißspannungen an den Orten der Bruchauslösung abgeleitete „reduzierte“ Biegefestigkeit, so liegt diese unterhalb der konventionellen Biegefestigkeit, aber noch merklich höher und stärker

¹³ A. Smekal: Glastechn. Ber. **23**, 57, 186 (1950).

¹⁴ Vgl. A. Smekal: Glas Tekn. Tidskr. **7**, 147, Nr. 6 (1952) (nach einem Bericht an die Internationale Glaskommission vom Juni 1951).

streuend als die Zugfestigkeit des Stabmaterials, womit die selbständige Wirksamkeit von A und B bestätigt erscheint (Tabelle).

Mittlere Zug- und Biegefestigkeit von Rundstäben des Thermometerglases 16 III bei übereinstimmender Versuchsgeschwindigkeit von $50 \text{ p/mm}^2 \cdot \text{sec.}$ (Mittel aus je 10 Einzelversuchen).

Technische Biegefestigkeit	$11.11 \pm 0.87 \text{ kp/mm}^2$
Reduzierte Biegefestigkeit	10.00 ± 1.47 „
Zugfestigkeit	7.43 ± 0.64 „

Die hiermit neuerlich qualitativ bestätigte Voraussetzung einer bestimmten statistischen Oberflächendichte der für eine Bruchauslösung in Betracht kommenden Inhomogenitätsstellen führt noch zu weiteren prüfaren Folgerungen. So verlangt sie ein Absinken der mittleren Biege- und Zugfestigkeit mit zunehmender Stablänge und wachsendem Stabdurchmesser, falls die Eigenspannungsverteilungen und Kerbwirksamkeiten der Inhomogenitätsstellen sowie ihre Oberflächendichten als unveränderlich betrachtet werden dürfen. Nachdem ersteres qualitativ wiederum zutrifft, sollte auch letzteres zumindest angenähert verwirklicht sein. Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhange die bedeutende Festigkeitszunahme von Glasstäben und -fäden bis zu Fadendurchmessern von der Größenordnung einzelner Mikron, eine Erscheinung, an der bei kleinsten Fadendurchmessern noch weitere Einflüsse teilhaben dürften¹⁵. Ob nun die Herstellung von Stäben oder Fäden mit kleineren Durchmessern aus größeren durch Herunterziehen im erweichten Stoffzustande oder durch Abätzen von Oberflächenschichten erfolgt — in jedem Falle werden Inhomogenitätsstellen, die sich vorher im Stabinneren befunden haben, an die Oberfläche oder deren Nachbarschaft versetzt, wo sie die Fähigkeit zeigen, bruchauslösend wirken zu können. Hierbei sinken die Fadendurchmesser schließlich unter die mittleren räumlichen Abstände der Inhomogenitätsstellen des kompakten Materials (vgl. Nr. 1), wodurch die Zugfestigkeit dann der Größenordnung der Kohäsion an der Grenze des Sprödeverhaltens (Nr. 1) nahekommt.

Mit den vorstehenden Erwägungen erscheint die Frage aufgeworfen, ob die im Stoffinneren vorhandenen Inhomogenitätsstellen mit den im Biege- und Zugversuch betätigten oberflächennahen Inhomogenitätsstellen wesensgleich sind, ob eine Befähigung zur Bruchauslösung auch im Körperinneren vorhanden sein kann? Wie sich herausstellen wird, bedarf ein Urteil darüber der Klarstellung des funktionellen Zusammenhanges zwischen Bruchauslösung und Bruchfortpflanzung. Im übrigen ist hervorzuheben, daß eine gewisse Sonderstellung der Oberflächenschicht anlässlich der Entstehung oder Herstellung der Festkörper zumeist unvermeidlich ist, so daß auch mit vorgegebenen Unterschieden dieser Art gerechnet werden kann.

5. Zeitlicher Verlauf des Bruchvorganges von kreiszyllindrischen Zugstäben mit sprödem Stoffverhalten.

Eine Beurteilung des zeitlichen Verlaufes von Bruchvorgängen wird vor allem durch die Tatsache gefordert, daß die empirischen Festigkeitsgrenzen des spröden Stoffverhaltens eine starke Abhängigkeit vom zeitlichen Verlauf der Beanspruchungszunahmen sowie von der Temperatur aufweisen¹⁶. Hierzu gehört auch das Bestehen der meist auffällig niedrig gelegenen Dauerstand-Festigkeitsgrenzen, an denen der

¹⁵ Dazu gehören nach zum Teil noch unveröffentlichten Untersuchungen in verschiedenen Durchmesserbereichen: Spannungsgehalte in der Oberflächen- und Kernzone, selektive Stoffverluste durch Ionenabgaben, chemische Reduzierung der Fadenoberfläche und Gasadsorption daselbst, vielleicht auch die Ausbildung anisotrop-amorpher Ziehstrukturen.

¹⁶ Vgl. etwa A. Smekal: *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **15**, 106—188 (1936).

Zeitbedarf der Bruchvorgänge bis zu makroskopischem Übermaß gesteigert ist¹⁷. Daß die von der Mechanik der Kontinua ausgehenden Bruchtheorien den Zeitfaktor dennoch vernachlässigen, dürfte darauf beruhen, daß die beobachtbaren Teilvorgänge von Gewaltbrüchen meist mit sehr großer Geschwindigkeit ablaufen, und daß man dies auch von dem übrigen Bruchverlauf voraussetzte.

Indem man die Bruchauslösung an Inhomogenitätsstellen berücksichtigte, schien sich die Möglichkeit zu eröffnen, alle Zeiteinflüsse Veränderungen am Ort des Bruchbeginnes vorzubehalten. Im Rahmen einer Vertiefung der Griffithschen Bruchtheorie lieferte dieser Ansatz eine qualitativ zutreffende Wiedergabe des Einflusses von Temperatur und Versuchsgeschwindigkeit¹⁸, die aber für eine endgültige Klarstellung nicht ausreichte. Daher wurde ein Verfahren zur experimentellen Bestimmung von Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeiten entwickelt¹⁹. Es beruht auf der Entdeckung, daß die Auslösung der Rückfederung winziger Eigenspannungsbereiche die Aussendung von Ultraschall-Stoßwellen bewirkt, welche auf gleichzeitig entstehenden Bruchflächen dauerhafte Spuren aufzeichnen, die als Zeitmarken des Bruchfortschrittes benutzbar sind²⁰. Derartige „Wallner-Linien“ wurden zuerst an Biegebruchflächen nichtentpannter Glasstäbe beobachtet (Abb. 1). Sie konnten ebensogut an kristallinen Stoffen²¹ und an organischen Gläsern²² erhalten werden.

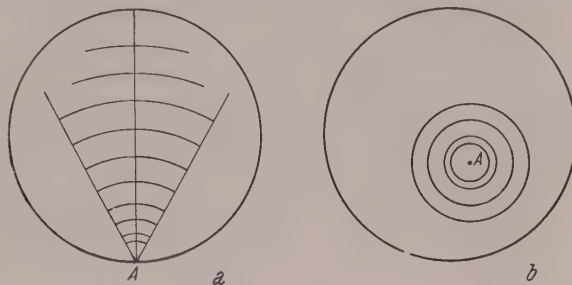


Abb. 4a und b. Schematische Darstellung des auf Zugbruchflächen von Zylinderstäben zu erwartenden Verlaufes der Bruchfronten sowie der Wege schnellsten Bruchfortschreitens. Große Kreise: Umriß des durch den Ort des Bruchanfanges A gehenden Stabquerschnittes senkrecht zur Stabachse und Zugrichtung, der die ebenen, spiegelnd glatten Teile der Bruchfläche enthält. Die kleinen konzentrischen Kreise (Abb. 4a) bzw. Kreisbogen (Abb. 4b) um A stellen zeitlich aufeinanderfolgende Bruchfronten dar. Die randnahen Teile der Bruchfronten in Abb. 4b sind nicht gezeichnet; ihr Verlauf wird durch die Bruchfortpflanzung längs des Randes modifiziert.

Zur Messung der Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeiten benötigt man vor allem eine Kenntnis der vom Bruchbeginn ausgehenden Wege raschesten Bruchfortschrittes, die als orthogonale Trajektorien zeitlich aufeinanderfolgender Bruchfronten auf den Bruchflächen bestimmt werden müssen. Im einfachst möglichen Falle der ebenen Bruchflächen von kreiszylindrischen Zugstäben besitzt die Bruchausbreitung im Stabinneren keine Vorzugsrichtungen, so daß als Bruchfronten konzentrische Kreise zu erwarten sind und der Bruchfortschritt geradlinig erfolgt. Die Bruchfronten müssen Vollkreise sein, wenn die bruchauslösende Inhomogenitätsstelle im Stabinneren gelegen ist (Abb. 4a). Befindet sie sich an der Staboberfläche, dann kann ein kreisbogenförmiger Verlauf der Bruchfronten nur innerhalb eines bestimmten Winkelbereiches erwartet werden (Abb. 4b). Dies ist von den Messungen sehr gut bestätigt worden. Eine erste Bewährung konnte von vornherein bereits in der Tat-

¹⁷ Die im früheren Institut des Verfassers 1938/39 vom Studienrat G. F. Sperling ausgeführten Dauerstand-Zugversuche an Glasstäben sind noch unveröffentlicht.

¹⁸ A. Smekal: Z. Physik **103**, 495 (1936); J. Soc. Glass Technol. **20**, 432 (1936); Glastechn. Ber. **15**, 259 (1937). Ferner der in Anm. 16 genannte ausführliche Bericht.

¹⁹ A. Smekal: Glastechn. Ber. **23**, 57, 186 (1950).

²⁰ H. Wallner: Z. Physik **114**, 368 (1939). — A. Smekal: Physik. Z. **41**, 475 (1940).

²¹ A. Smekal: Nova Acta Leopold. (N. F.) **11**, 512 (1942); Verh. dtsch. physik. Ges. **23**, 39 (1942).

²² D. Wapler: Diss., Halle 1945.

sache erblickt werden, daß die spiegelnd glatten, den Ort des Bruchbeginnes umschließenden Teile der Zugbruchflächen im Stabinneren ebenfalls von einem Vollkreise²³, bei Randlage des Bruchbeginnes gegen das Stabinnere durch einen Kreis-

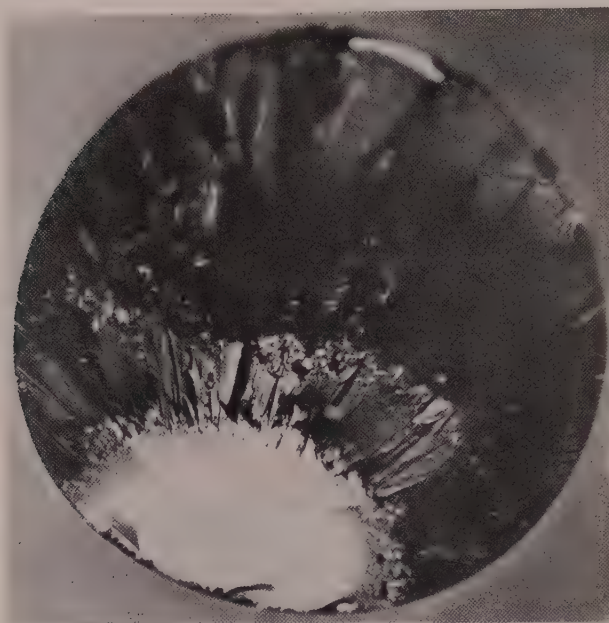


Abb. 5. Bruchquerschnitt eines Zugstabes aus handmattiertem Thüringer Geräteglas. Neophot-Zeiß, Auflicht-Hellfeld mit zusätzlichem Durchlicht, Abbildungsmaßstab 12:4:1. Belastungsgeschwindigkeit 291 p/mm² · sec., Zerreißspannung 5·3 kp/mm². Der glatte „Spiegel“ beträgt hier etwa 10% des Gesamtquerschnittes. Der Stab war während des Zerreißversuches von Öl umgeben (G. Apelt, 1945).

Bruchbeginnes gehende Symmetrale der Bruchbilder festzuhalten. Ein Beispiel dieser Art enthält Abb. 6, wobei die Bruchgeschwindigkeit in Teilen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stabmaterials für elastische Transversalwellen ausgedrückt erscheint. Die Bruchgeschwindigkeit ist nicht konstant. Sie beginnt offenbar mit einem sehr kleinen Betrag, nimmt mit wachsendem Bruchweg zuerst langsam, dann immer beschleunigter zu, durchläuft einen Wendepunkt und erreicht schließlich einen hohen Endwert, der auch über längere Wegstrecken unveränderlich bleibt.

Um den Einfluß des Stabmaterials sowie individueller Eigenschaften einzelner Bruchvorgänge überblicken zu können, sind in Abb. 7 je drei Meßreihen an Quarzglas und am optischen Glase BK 7 von Schott wiedergegeben. Die hohe Endgeschwindigkeit der Bruchfortpflanzung ist eine praktisch unveränderliche Stoffeigenschaft; auch entspricht dem größeren der beiden Stoffwerte allgemein ein rasches Anwachsen der Bruchgeschwindigkeiten. Der Einzelverlauf des Bruchgeschwindigkeitsanstieges jedoch ist eine individuelle Eigenschaft der

bogen begrenzt sind. Eine Zugbruchfläche der letzteren Art mit verhältnismäßig kleiner „Spiegel“fläche ist in Abb. 5 wiedergegeben.

Nachdem die Messungen der Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeit für alle Fortpflanzungsrichtungen des in Abb. 4b gezeichneten Winkelbereiches übereinstimmen, genügt es, die Meßergebnisse etwa für die durch den Ort des

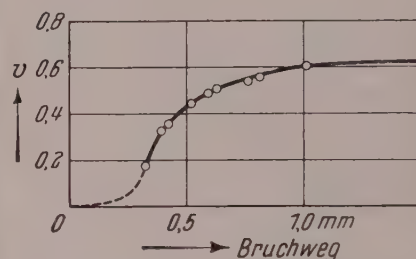


Abb. 6. Verhältnis v der Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Transversalwellen eines Quarzglasstabes von 6 mm Durchmesser in Abhängigkeit vom zurückgelegten Bruchwege (Smekal, 1950). Der ausgezogene Kurvenverlauf entspricht den Messungen, der strichlierte Verlauf ist extrapoliert.

²³ Eine Abbildung eines solchen „Innen“spiegels bei M. Eichler: Z. Physik 98, 280 (1935) sowie in den in Anm. 16 und 18 zitierten Veröffentlichungen.

Probekörper. Er ist überdies von der Versuchstemperatur und von der Versuchsgeschwindigkeit abhängig²⁴.

Diese Ergebnisse lehren, daß die Zeit- und Temperaturabhängigkeit der Zugfestigkeit in der Zeit- und Temperaturabhängigkeit des Bruchgeschwindigkeitsanstieges ihre Entsprechung finden, also nicht an der bruchauslösenden Inhomogenitätsstelle lokalisierbar sind. Die Individualität der Bruchgeschwindigkeitsanstiege spricht andererseits für eine starke Beeinflußbarkeit der Anfangsphase der Bruchfortpflanzung durch die Individualität der bruch-

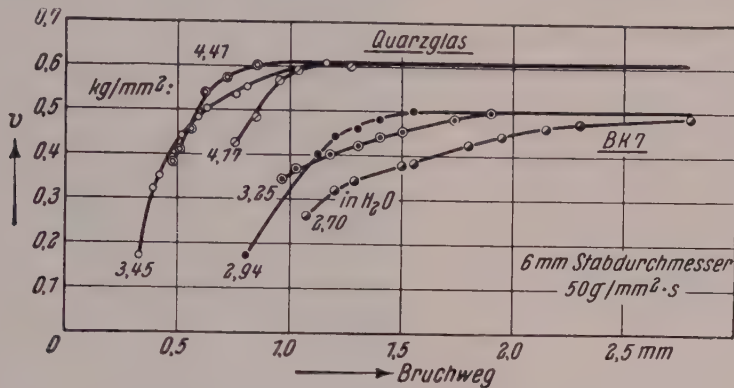


Abb. 7.* Relative Bruchfortpflanzungsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit vom zurückgelegten Bruchwege für je drei 6-mm-Rundstäbe aus Quarzglas und aus dem optischen Glase BK 7 von Schott. Individuelle Bruchgeschwindigkeitsanstiege, gemeinsame, stoffkonstante Endgeschwindigkeiten. Die den Kurvenanstiegen beige-schriebenen Zahlen entsprechen den individuellen Zerreißfestigkeiten der Einzelproben in kp/mm^2 .

auslösenden Inhomogenitätsstelle sowie etwaige weitere Besonderheiten längs der anschließend zurückgelegten, nicht unbeträchtlichen Bruchwege.

Eine Anwendung der vorstehenden Resultate über die Kinematik der Bruchauslösung und Bruchfortpflanzung, welche ihre Allgemeinheit zu prüfen vermag, betrifft die Auslösung von Bruchvorgängen an Inhomogenitätsstellen im Inneren von Zugstäben während des Fortschreitens eines zuvor nahe der Staboberfläche ausgelösten „Haupt“-bruches. Der sekundäre „Innen“-bruch kann naturgemäß nur wahrgenommen werden, wenn beide Bruchebenen, die unabhängig voneinander nahezu senkrecht zur Zugrichtung orientiert sein müssen, nahezu das gleiche Niveau besitzen und daher, von geringen Höhen- und Neigungsunterschieden abgesehen, schließlich zu einer gemeinsamen Bruchfläche zusammenwachsen. Unter diesen Voraussetzungen wird die Fortpflanzung des primären Randbruches wie bisher gemäß Abb. 4 b, jene des später einsetzenden sekundären Innenbruches, davon unabhängig, gemäß Abb. 4 a stattfinden.

Wegen der allseitigen Ausbreitung des Innenbruches wird dieser dem Hauptbruch längs der Verbindungsgeraden zwischen dem sekundären Bruchzentrum und dem Ort des primären Bruchbeginnes entgegenlaufen, bis beide Bruchflächen an der Begegnungsstelle mittels eines Gefällsknickes ineinander übergehen. Da das Zusammentreffen beiderseits dieser Geraden die Zurücklegung längerer Bruchwege erfordert, wird sich der Gefällsknick bogenförmig fortsetzen und die gegenseitige Abgrenzung der beiden Bruchvorgänge längs eines zu jener Verbindungslinie symmetrischen Kurvenverlaufes erfolgen. Die Kurvengestalt wird durch das Verhalten der beiderseitigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vom Zeitpunkt der ersten Begegnung ab festgelegt.

²⁴ A. Smekal: Glastechn. Ber. **23**, 186 (1950).

* In der Abbildung soll richtig stehen: kp/mm^2 , statt: kg/mm^2 , bzw. $50 \text{ p/mm}^2 \cdot \text{s}$, statt: $50 \text{ g/mm}^2 \cdot \text{s}$.

a) Darf man für beide Geschwindigkeiten den konstanten hohen Endwert der Abb. 6 und 7 zugrunde legen, dann erkennt man, daß die Abstände aller Kurvenpunkte von den beiden Bruchzentren durch eine unveränderliche Differenz gekennzeichnet sind. Die Kurve stellt in diesem Fall einen Hyperbelast dar, der das Innenbruchzentrum umschließt und dessen Brennpunkte mit den beiden Bruchzentren zusammenfallen (Abbildung 8)²⁵.

b) Hat der später ausgelöste Innenbruch im Gegensatz zum Hauptbruch die Endgeschwindigkeit noch nicht erreicht, dann können mannigfache offene und geschlossene Kurvenformen zustande kommen. Der letztere Fall bedeutet, daß der Innenbruch vom Hauptbruch alsbald überholt und von weiterer Ausbreitung abgeschnitten

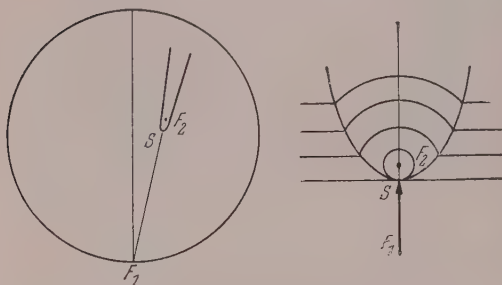


Abb. 8. Entstehung hyperbolisch begrenzter Sekundärbruchgebiete auf Primärbruchflächen (schematisch). F_1 Primärbruchbeginn, F_2 Sekundärbruchzentrum, S Ort des ersten Zusammentreffens der beiden Bruchvorgänge. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Vorgänge sind spätestens vom Zeitpunkte der Begegnung in S ab als übereinstimmend vorausgesetzt; dann sind F_1 , F_2 die Brennpunkte und S der Scheitel des Hyperbelastes um F_2 .

wird, wodurch Umrisse von der Art eines Stromlinienprofils entstehen.

Die Untersuchung jeder Zugbruchfläche mit ausgedehntem „Spiegel“-bereich ergibt das Vorhandensein bemerkenswert zahlreicher langgestreckter „Bruchhyperbeln“, deren asymptotische Ausläufer in der den „Spiegel“ umgebenden feinen Bruchflächen-



Abb. 9. Ausschnitt aus der den „Spiegel“ umgebenden „feinen Rauigkeit“ der Zugbruchfläche eines Rundstabes aus Aachener Spiegelglas. Metaphot-Busch, Auflicht-Dunkelfeld, Abbildungsmaßstab 450:1 (W. Klemm, 1945). — Die allgemeine Fortpflanzungsrichtung des Primärbruches, von links unten nach rechts oben schwach divergierend, ist beträchtlich steiler als die Diagonale des Bildausschnittes und ist an sämtlichen Feinstrukturen deutlich erkennbar. Die dunkle Bruchhyperbel entspricht der Begegnung des Primärbruches mit dem am weitesten, nämlich bis zur athermischen Phase entwickelten Sekundärbruch des Bildausschnittes. Die Mehrzahl der kleineren Sekundärbruchformen zeigt parallelen oder konvergierenden Verlauf in Richtung des Primärbruchfortschreitens, so daß die zugehörigen Sekundärbrüche noch spannungsthermische Geschwindigkeiten besessen haben. Das helle stromlinienprofilartige Gebilde links vom Hyperbelkopf entspricht einem Sekundärbruch mit besonders niedriger spannungsthermischer Fortpflanzungsgeschwindigkeit während der Begegnung mit dem Primärbruch.

²⁵ A. Smekal: Glastechn. Ber. **23**, 57 (1950). Abbildung der Hyperbelstreifung daselbst Bild 9, Abbildungen von Bruchhyperbeln Bild 10 bis 12 (S. 63) an Glasbruchflächen und in Bild 13 bis 15 an Plexiglasbruchflächen.

rauhigkeit eine dichte Streifung hervorbringen²⁵. Die mikrointerferometrische Untersuchung einzelner, auch im Scheitelbereich gut auflösbarer Bruchhyperbeln bestätigte, daß die Bruchfläche im Hyperbelinneren ein vom Außengebiet verschiedenes Niveau aufweist und daß die Hyperbelkontur der zugehörigen Übergangsstufe entspricht²⁵.

Die feine Rauhigkeit mancher Zugbruchflächen enthält überdies Gebilde mit nichthyperbolischen, offenen und geschlossenen Umrißkurven, die im mikroskopischen Dunkelfeld ebenfalls als Schrägstreifen von Übergangsstufen erscheinen und den unter b) erwarteten Formen entsprechen (Abb. 9). Hier liegen demnach die Spuren von Innenbrüchen vor, deren Fortpflanzung sich noch im Bereich der langsamen Anfangsphase befanden, als die Fixierung ihrer Grenzen durch die Begegnung mit dem Hauptbruch geschah.

6. Mechanismus der Bruchauslösung und Bruchfortpflanzung bei sprödem Stoffverhalten unter einachsiger Beanspruchung.

Der experimentell bestimmte Bruchgeschwindigkeitsverlauf (Abb. 6) besagt, daß die Bruchfortpflanzung auf zwei ihrem Wesen nach grundverschiedenen Teilvorgängen beruht, einer zeitlich trägen „Anlauf“-phase und einer praktisch stationären „End“-phase. Zur Veranschaulichung sei hervorgehoben, daß der Bruchvorgang des Quarzglasstabes der Abb. 6 während der bis zum Wendepunkt gezählten Anlaufphase zur Zurücklegung eines Bruchweges von 0·3 mm rund 30 Sekunden benötigte, daß der restliche Bruchweg von 5·7 mm während der Endphase dagegen innerhalb weniger Mikrosekunden (10^{-6} sec.) zurückgelegt wurde²⁶. Abgesehen vom Grenzfall des Dauerstandversuches ist die Anlaufphase daher durch ein hier mit $50 \text{ p/mm}^2 \cdot \text{sec.}$ fortgesetztes Ansteigen der äußeren Beanspruchung gekennzeichnet, wogegen die Endphase unter einer praktisch unveränderlichen, hier als „Zugfestigkeit“ ermittelten Endbeanspruchung vor sich geht. Die den Bruchvorgang auslösende Zugbeanspruchung muß demnach im allgemeinen beträchtlich unterhalb der Endbeanspruchung (hier $3\cdot5 \text{ kp/mm}^2$) liegen und dürfte praktisch mit der Dauerstand-Zugfestigkeit (hier etwa 2 kp/mm^2) übereinstimmen.

Aus diesen Feststellungen ergibt sich, daß die die Bruchauslösung ermöglichende Inhomogenitätsstelle die Beschaffenheit eines (dreidimensionalen) Griffithschen Risses nicht besitzt, weil dann zur Vollendung des Bruchvorganges keine weitere Arbeitsleistung erforderlich wäre. Um die Notwendigkeit fortgesetzter Energiezufuhr während der gesamten Anlaufphase des Bruchvorganges sicherzustellen, scheinen vielmehr folgende Annahmen unerläßlich zu sein:

a) Die bruchauslösende Inhomogenitätsstelle besitzt ein begrenztes individuelles Eigenspannungsfeld mit Kerbwirkung.

b) Die örtliche Stofftrennung entsteht durch Zusammenwirken von maximaler Eigenzugspannung und Kerbzugspannung, so daß der erste Bruchspalt den Bereich des Eigenspannungsfeldes nicht zu überschreiten vermag.

c) Das Kerbspannungsfeld des Bruchspaltes reicht auch während der anschließenden Beanspruchungszunahmen zu rein mechanischer Fortsetzung der Stofftrennung nicht aus.

d) Die weitere Stofftrennung erfolgt dadurch, daß der fehlende Betrag an elastischer Energie örtlichen Schwankungen der Wärmeenergie des Materials entnommen wird.

Man sieht, daß a) der Beschaffenheit der bruchauslösenden Inhomogenitätsstelle entspricht, die oben bereits aus der Markierung des Bruchbeginnortes auf den Bruchflächen gefolgert wurde (Nr. 3) und die bei Zugbruchflächen ebenso gefunden wird

²⁶ A. Smekal: Acta Phys. Austr. 6 (1953) (im Erscheinen).

wie an Biegebruchflächen. Die grundsätzliche Notwendigkeit des spannungsthermischen Mechanismus der Bruchfortpflanzung d) ist bereits seit langem erkannt¹⁸; erst die jetzt vorliegenden Bruchgeschwindigkeitsmessungen machen den räumlich und zeitlich ausgedehnten Umfang der Anlaufphase des Bruchgeschehens erkennbar, für den die Wirksamkeit dieses Mechanismus benötigt wird²⁶. Aus b) und c) erkennt man ferner, daß die Individualität der bruchauslösenden Inhomogenitätsstelle während der gesamten Anlaufphase fortwirkt, indem die bei den Versuchen (Abb. 7) benutzte gleichförmige Belastungszunahme in jedem folgenden Zeitelement einen größeren Anteil an mechanischer Energiezufuhr und damit eine weitere Beschleunigung des spannungsthermischen Bruchfortschrittes sicherstellt. Dabei ist die Wirksamkeit einer Verminderung oder Steigerung der Beanspruchungszunahme qualitativ äquivalent einer Erhöhung oder Senkung der Versuchstemperatur, wodurch ein weiterer lange bekannter empirischer Sachverhalt wiedergegeben wird¹⁸. Für die Begrenzung des Temperaturbereiches seiner Geltung erhält man nunmehr die einleuchtende Forderung, daß die Steigerung der Wärmebewegung einen Abbau weder des Eigenspannungsfeldes der bruchauslösenden Inhomogenitätsstelle noch der Kerbwirkung an der Front des Bruchspaltes bewirken darf; andernfalls muß die Wärmewirkung eine dem Hochtrainieren zäher Werkstoffe verwandte Festigkeitszunahme liefern, welche durch geeignete Versuche an Glasstäben tatsächlich gefunden werden konnte²⁷.

Die konstante Endgeschwindigkeit der Bruchfortpflanzung ist an zweidimensionalen Körpern mittels anderer Verfahren verschiedentlich in guter Übereinstimmung mit den vorstehenden Ergebnissen erhalten worden²⁸. Sie besitzt keine nennenswerte Temperaturabhängigkeit und ist von der gleichen Größenordnung wie die transversale Wellengeschwindigkeit. Somit kennzeichnet sie einen athermischen Mechanismus der Bruchfortpflanzung als Grenzgeschwindigkeit für die Zulieferung und Umwandlung von elastischer Energie in Oberflächenenergie der neuentstehenden Bruchflächenteile²⁹. Als solche ist sie auch merklich unabhängig von den gerade vorliegenden Beanspruchungen oder Beanspruchungsänderungen; Abb. 7 bestätigt das für die individuellen Festigkeitsunterschiede zwischen den einzelnen Probestäben³⁰.

Die oben besprochenen Umrisse sekundär entstandener „Innen“-brüche auf den Bruchflächen primärer „Rand“-brüche (Abb. 9) belegen, daß Anlauf- und Endphase der Bruchfortpflanzung auch für Innenbrüche nachweisbar sind und daher an jeder Art von Bruchauslösung und Bruchfortpflanzung in gleicher Weise teilhaben sollten. Somit sind auch im Inneren der Probekörper vorhandene und zur Bruchauslösung geeignete Inhomogenitätsstellen „Eigenspannungsstellen mit Kerbwirkung“, jedoch

²⁷ Unveröffentlichte Versuche von Studienrat G. F. Sperling, Halle 1938/39; vgl. Anm. 17.

²⁸ H. Schardin und W. Struth: Z. techn. Physik **18**, 474 (1937); Glastechn. Ber. **16**, 219 (1938). — F. E. Barstow und H. E. Edgerton: J. Amer. ceram. Soc. **22**, 302 (1939). — H. M. Dimmick und J. M. McCormick: Glastechn. Ber. **23**, 193 (1950). — H. M. Dimmick: J. Soc. Glass Technol. **35**, 318 (1951). Die benutzten Verfahren besitzen zwar ein hohes zeitliches Auflösungsvermögen, aber keine nennenswerte räumliche Auflösung, wodurch die träge Anlaufphase der Bruchvorgänge der Beobachtung entzogen bleibt.

²⁹ Nachdem die athermische Bruchfortpflanzung im grundsätzlich inhomogenen Medium vor sich geht, besteht die Möglichkeit, daß für erstere wesentlich nur die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellenlängen der Größenordnung des mittleren Durchmessers der Wirkungsreichweite der Inhomogenitätsstellen maßgebend ist. Für diesen Wellenlängenbereich muß das inhomogene Medium Dispersionseigenschaften besitzen, so daß die athermisch-konstante Bruchgeschwindigkeit hinter der Wellengeschwindigkeit von längeren Transversalwellen zurückbleibt. Vgl. A. Smekal: Physik. Z. **41**, 475 (1940); Glastechn. Ber. **16**, 228 (1938).

³⁰ Diese Eigenschaften schließen es aus, die athermische Bruchgeschwindigkeit mit der Erweiterung Griffithscher Rißspalte in Verbindung zu bringen und die Griffithschen Annahmen damit wenigstens auf die Endphase der Bruchfortpflanzung anzuwenden.

verlangt die nachweisbare Bruchauslösung an ihnen offenbar meist beträchtlich größere Zugbeanspruchungen der Probestäbe als an oberflächennahen Inhomogenitätsstellen. Primäre Bruchauslösung im Stabinneren (Abb. 4b)²³ ist jedenfalls ein sehr seltenes Vorkommnis und an spannungsfreien Proben übereinstimmender Glaszusammensetzung mit einer Häufigkeit von kaum 0,1% gefunden worden³¹. Diese Tatsache steht in bemerkenswertem Gegensatz zu der bedeutend größeren Anzahl der im Probeninneren vorhandenen Inhomogenitätsstellen (Nr. 1, 4). Die eindeutige Bevorzugung oberflächennaher Inhomogenitätsstellen durch die primäre Bruchauslösung wird indes verständlich, wenn man sie als Bevorzugung der Fortpflanzung oberflächennah entstandener Bruchflächenspalte auffaßt und mit der größenordnungsmäßigen Verschiedenheit des Zeitbedarfes der spannungsthermischen und der athermischen Phase der Bruchfortpflanzung in Verbindung bringt.

In der Tat muß damit gerechnet werden, daß während der Beanspruchungszunahmen des Festigkeitsversuches nicht nur an einer, sondern an einer mit der Beanspruchung wachsenden Anzahl von geeigneten Inhomogenitätsstellen des Probekörpers winzige Bruchspalte ausgelöst und spannungsthermisch vergrößert werden. Die makroskopische Bruchbildung wird dann jenem Bruchspalt zugehören, der als erster die athermische Fortpflanzungsphase erreicht, was wegen der Individualität des spannungsthermischen Zeitverlaufes (Abb. 7) keineswegs verlangt, daß dieser Bruchspalt als erster gebildet wurde. Vor allem aber kommt es auf den Zeitpunkt an, zu dem der erste der miteinander konkurrierenden Bruchvorgänge zur Staboberfläche durchbricht und der fördernden Beeinflussung durch Wasserdampf oder andere grenzflächenaktive äußere Medien teilhaftig wird³². Die statistische Benachteiligung primärer „Innen“-brüche folgt somit zwanglos aus derartigen, von außen hinzukommenden Beschleunigungen des spannungsthermischen Bruchfortschrittes, die allen ganz im Stabinneren verlaufenden Bruchvorgängen vorenthalten bleiben³³.

Die letzte Konsequenz des Zusammenhanges zwischen Bruchbildung und inhomogener Stoffbeschaffenheit (Nr. 1) besteht also darin, das makroskopische Bruchgeschehen als Ergebnis einer zeitlichen Konkurrenz räumlich voneinander unabhängiger Einzelvorgänge auffassen zu müssen. Für die experimentelle Prüfung dieser Folgerung bietet die einachsige Homogenbeanspruchung von Rundstäben dadurch günstige Voraussetzungen, daß sie bei einwandfreier Versuchsausführung³⁴ für sämtliche Inhomogenitätsstellen der Versuchsstoffe übereinstimmende äußere Bedingungen verwirklicht. Die Feststellung mehrerer gleichzeitiger Brüche wird andererseits dadurch entscheidend beeinträchtigt, daß die letzteren innerhalb der wenige Mikrosekunden betragenden Dauer einer Endphase das athermische Bruchfortpflanzungsstadium erreichen müssen, um nicht zuletzt doch noch unvollendet zu bleiben. Vieljährige Beobachtungen an Zugstäben des gleichen Thüringer Geräte-

³¹ Ergebnis langjähriger Untersuchungen an Stäben eines Thüringer Geräteglases mit 50 mm freier Länge und 1,4 mm Durchmesser. Spannungshaltige Proben mit Druckvorspannungen in der Mantelzone zeigen erwartungsgemäß etwas häufigere, von der zuggespannten Kernzone ausgehende primäre „Innen“-brüche.

³² Solche Vorgänge sind in bisher unveröffentlichten Modellversuchen von Studienrat G. F. Sperling 1939 direkt mikroskopisch beobachtet worden. — Die bisherige Auffassung, daß die bruchauslösenden Inhomogenitätsstellen unmittelbar an der Probenoberfläche gelegen sind, scheint übermikroskopisch nicht belegbar zu sein. Die in der Literatur gelegentlich behauptete Sichtbarmachung solcher Oberflächenkerbstellen betrifft stets größere Anrisse in fortgeschrittenen Entwicklungszuständen der spannungsthermischen Bruchfortpflanzung.

³³ Dies entspricht den von allen sorgfältigen Beobachtern gefundenen Einflüssen umgebender Medien auf die Zerreißfestigkeit von Glasstäben.

³⁴ Vgl. etwa E. Rexer: *Glastechn. Ber.* 16, 263 (1938).

glases haben gezeigt, daß tatsächlich am gleichen Zugstabe zwei einwandfreie Zugbruchflächen auftreten können und daß die Häufigkeit solcher Vorkommnisse die Größenordnung 0·01 bis 0·1% besitzt³⁵. Die Beobachtung unvollendet gebliebener Anrisse ist an runden Glasstäben bisher nicht geglückt, wohl aber des öfteren an Würfelspaltstäbchen synthetischer Steinsalzkristalle, bei denen die Endphase der Bruchfortpflanzung einen größeren Zeitbedarf aufzuweisen scheint³⁶.

7. Zum Bruchvorgang bei sprödem Stoffverhalten unter mehrachsigen Beanspruchungen. Experimentelle Unterlagen von Emil Eberle und Franz Puchegger.

Nachdem ausführlichere Untersuchungen über Bruchvorgänge unter mehrachsigen Beanspruchungen noch nicht vorliegen, trachten wir die vorstehenden Ergebnisse

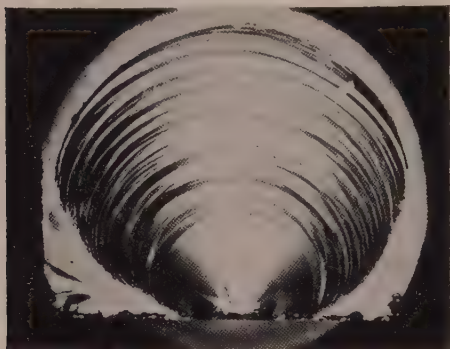


Abb. 10. Zwei Muschelbrüche von gewöhnlichem Fensterglas, schwach vergrößert (E. Eberle, 1951). Bruchfortpflanzung von unten nach oben. Die hellen, radial gerichteten Streifen in der unsymmetrischen Muschel bestehen aus Lanzettbrüchen.

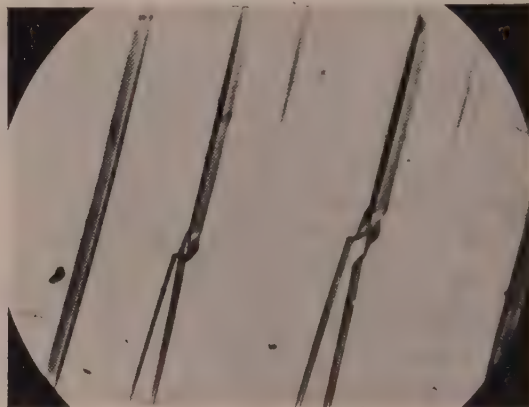


Abb. 11. Lanzettbrüche auf primären Muschelbrüchen. Unten: Auflicht-Dunkelfeld, Abbildungsmaßstab 44:1, oben: Auflicht-Hellfeld, Abbildungsmaßstab 88:1 (E. Eberle, 1951).

Die Prüfung der Bruchflächen sicherte die Abwesenheit zusätzlicher Biegebeanspruchungen und ergab unterschiedlich große „Rand“spiegel, so daß die Bruchbeginne nicht zum gleichen Zeitpunkt ausgelöst sein konnten.

³⁶ Auch diese Beobachtungen sind mehreren Mitarbeitern zu verdanken, insbesondere H. Schönfeld: Z. Physik 75, 442 (1932) sowie A. Edner: Ebenda 73, 623 (1932), die auf den Würfelfreißflächen auch Plastizitätsspuren fanden. Die Endphase des Bruchvorganges von Steinsalz-Spaltstäbchen längs Würfelspaltflächen geht immerhin so schnell vor sich, daß ihre

³⁵ Diese bisher unveröffentlichten Beobachtungen sind verschiedenen Mitarbeitern zu verdanken.

dafür nutzbar zu machen, indem wir Bruchvorgänge heranziehen, die durch einachsige Beanspruchungen ausgelöst werden und ihren Verlauf in mehrachsig beanspruchten Stoffgebieten fortsetzen. Dieser stetige Übergang bewirkt im allgemeinen eine Orientierungsänderung der ursprünglich allein vorhandenen Zugspannung, welche hierbei die Bedeutung der größeren Hauptzugspannung übernimmt und überall senkrecht zu der sich krümmenden Bruchfläche gerichtet bleibt. Die zweite, im mehrachsigen Beanspruchungsgebiet hinzukommende und dort allmählich anwachsende Hauptzugspannung verläuft dann in der jeweiligen Tangentialebene an die Bruchfläche. Sie kann durch den primären Bruchverlauf unter den vorausgesetzten Bedingungen nicht entlastet werden, so daß sie den weiteren Bruchverlauf beeinflussen wird, falls sie die dazu notwendige Stärke erreicht.

Betrachtet man die Richtungen des schnellsten Bruchfortschrittes längs der gekrümmten Bruchfläche, so sind zwei einfache Grenzfälle denkbar: die in der Bruchfläche liegende Hauptzugspannung kann entweder parallel oder senkrecht zur Richtung des Bruchfortschrittes orientiert sein. Auf der Primärbruchfläche entstehende sekundäre Bruchvorgänge, welche die zweite Hauptzugspannung entlasten könnten, müßten im ersten Falle parallel zu den Primärbruchfronten verlaufen, wofür keine stetige Bildungsmöglichkeit einzusehen ist. Liegt die zweite Hauptzugspannung dagegen senkrecht zur Richtung des Bruchfortschrittes, dann erscheint es ohne weiteres möglich, daß ein durch diese zweite Zugspannung ausgelöster Sekundärvorgang im gleichen Tempo fortschreitet wie die Primärbruchfront.

Die angegebenen Voraussetzungen gelten für Teilabschnitte von zahlreichen unregelmäßig verlaufenden Bruchvorgängen und können am sogenannten Muschelbruch der amorphen und vieler kristallinen Festkörper in besonders übersichtlicher Weise verwirklicht werden (Abb. 10)³⁷. Hierbei sind in vielen Fällen tatsächlich Sekundärbruchstrukturen vorhanden, deren Längsrichtung den Richtungen der primären Bruchfortpflanzung folgen. Man findet diese Sekundärbruchformen in allen

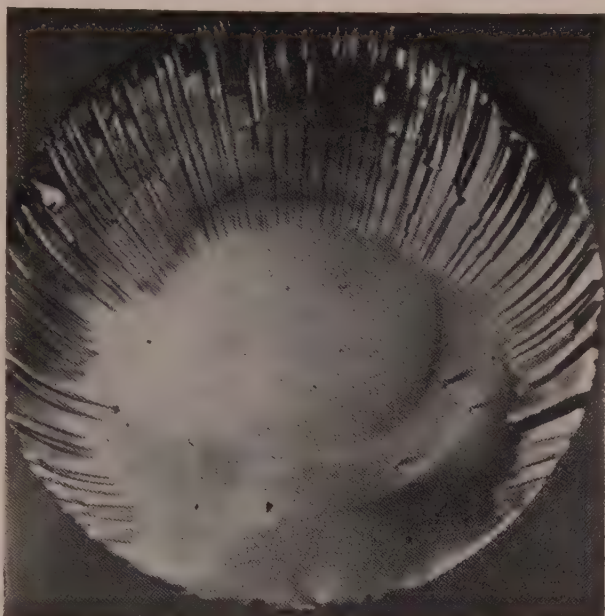


Abb. 12. Lanzettbrüche auf der Bruchfläche eines in einer Druckkammer unter Öldruck geprüften handmattierten Rundstabes aus Thüringer Geräteglast (vgl. Abb. 5). Neophot-Zeiß, Auflicht-Hellfeld, Abbildungsmaßstab 13:1 (G. Apelt, 1945). — Der Stab hatte einen Durchmesser von 5·7 mm, wurde mit der Versuchsgeschwindigkeit von 346 p/mm²·sec. beansprucht und zeigt eine Zerreißspannung von 7·8 kp/mm². Die Instabilitätsstellen der Lanzettbrüche z. B. innerhalb des ersten Quadranten des Bruchquerschnittes sind deutlich erkennbar, längs einer Schlierenfläche des Stabes aufgereiht.

Auflösung durch Anwendung des Thunschen Zeitdehners nicht möglich war. Vgl. unveröffentlichte Versuche von W. Ende und E. Rexer, zitiert bei A. Smekal: Kohäsion der Festkörper, in Auerbach-Hort: Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, Bd. IV/2, S. 153. Leipzig. 1931.

³⁷ E. Eberle: Hausarbeit für die Lehramtsprüfung. Graz. 1951.

Größenordnungen, wobei auch ihre Querabmessungen von übermikroskopischen bis makroskopischen Dimensionen variieren können. Es handelt sich somit um eine ganz allgemein verbreitete Brucherscheinung, die grundsätzlich als Repräsentant mehrachsiger Beanspruchungswirkungen anzusehen ist.

Bei geringer Auflösung sind diese Sekundärbruchformen an den stärker gekrümmten Teilen insbesondere von unsymmetrischen Muschelbrüchen als feine helle Striche erkennbar (Abb. 10). Stärkere Vergrößerung zeigt sie als flächige, lanzettartige Gebilde mit gelegentlichen Unterbrechungen, die bajonettartige Umrisse ergeben (Abb. 11). Gleichartige Strukturen finden sich auf den sonst glatten Bruchflächen von Rundstäben (Abb. 12), deren Enden durch Stopfbuchsen aus dem Inneren einer Druckkammer herausragten, während der Bruch durch Flüssigkeitsdruck auf die Staboberfläche herbeigeführt wurde. Da diese Beanspruchungsart jener des gewöhnlichen einachsigen Zugversuches äquivalent ist, entspricht ihre mittlere Grenz-

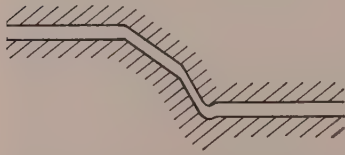


Abb. 13. Verlauf der Primärbruchufer im Bereiche einer Lanzettbruchfläche (schematisch, Querschnitt überhöht, nach F. Puchegger, 1952).

beanspruchung der normalen Zugfestigkeit des Stabmaterials³⁸. Durch das Eindringen der Druckflüssigkeit in den Bruchspalt entsteht indes während der Bruchfortpflanzung eine zusätzliche Biegebeanspruchung und damit jene Wölbung der Bruchfläche, mit welcher die Entstehung von Lanzettbrüchen auch sonst verbunden zu sein pflegt.

Die genauere mikroskopische und mikointerferometrische Untersuchung zeigt, daß die Lanzettbrüche nicht mit klaffenden Ufern von senkrecht zur Primärbruchfläche verlaufenden Einrissen zusammenhängen³⁹, vielmehr besonders „gefaltete“ Sekundärbruchflächen

darstellen, längs welcher die beiden Primärbruchufer lichtoptisch genau zusammenpassen (Abb. 13)⁴⁰. Die Einzelform entspricht der Gestalt eines langgestreckten, an beiden Enden zugespitzten Blattes, dessen schmale Fläche durch eine gerade Kante und einen schwach gekrümmten Bogen abgegrenzt ist; Kante und Bogen sind durch einen bestimmten Niveauunterschied gekennzeichnet, den der Blattstreifen gewissermaßen überbrückt und mit dem zugleich er entsteht und vergeht. An der dem Primärbruchbeginn zugewendeten Blattspitze ist häufig eine Inhomogenitätsstelle erkennbar, die von einem dunklen Fremdstoffteilchen gebildet sein kann. Sobald die gerade Kante interferometrisch deutlich auflösbar ist, besteht sie aus einem flachen, wallartigen Wulst, dem auf der Gegenfläche eine ebensolche grabenartige Hohlform entspricht. Der an die Wallkrone anschließende „Abhang“ zeigt anfänglich eine größere Steilheit (z. B. 30°), worauf nach deutlichem Gefällsknick ein langsames Absinken folgt, dessen Fläche mit dem tieferen Niveau eine nicht ausgerundete, flache Hohlkante bildet (Abb. 13). Die ihr auf der Gegenfläche entsprechende erhabene Kante erweist im mikroskopischen Hell- und Dunkelfeld einen merklich unregelmäßigen Verlauf von ähnlicher Beschaffenheit wie der einer zwischen benachbarten, sich unabhängig fortpflanzenden Bruchflächen entstehenden Bruchkante oder einer Sekundärbruchgrenze (Abb. 14)⁴¹.

³⁸ Noch unveröffentlichte Versuche von Studienrat G. Apelt (1945), vgl. Anm. 9.

³⁹ Soviel bekannt, sind auch anderwärts noch keine Bruchkanten gleichzeitig fortschreitender und dabei zueinander senkrecht gerichteter Bruchflächen beobachtet worden. Sie konnten auch bei eigenen, noch unveröffentlichten Untersuchungen über den Bruch von vorgespanntem Plattenglas („Sekurit“-glas) (1938) nicht gefunden werden, obgleich dort besonders günstige Voraussetzungen dafür vorhanden wären (beide Hauptzugspannungen erreichen ihre Höchstwerte in der Mittelebene des Plattenglases und sind angenähert von gleicher Größe).

⁴⁰ Untersuchungen von cand. phil. Franz Puchegger, Graz, Ende 1952.

⁴¹ Vgl. dazu die Abb. 5 und 6 sowie 10 und 11 bei A. Smekal: *Glastechn. Ber.* 23, 57 (1950). Ferner oben Abb. 9.

Die vorliegenden Beobachtungen sprechen dafür, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Primärbrüche im Entstehungsbereich von Lanzettbrüchen bereits die athermische Größenordnung besitzt. Durch die geschilderten Umstände und die Ähnlichkeit der Umrißformen wird daher die Erwartung nahegelegt, daß die Lanzettbrüche analog den Hyperbelbrüchen an Zugbruchflächen (Nr. 5) auf die Begegnung des Primärbruchvordringens mit selbständigen Sekundärbruchbildungen zurückzuführen sind. Diese Annahme verlangt hier in der Tat, daß Primär- und Sekundärbruchfläche nicht mehr zusammenfallen, weil die Sekundärbruchauslösung an geeigneten Inhomogenitätsstellen durch das mehrachsige Be-

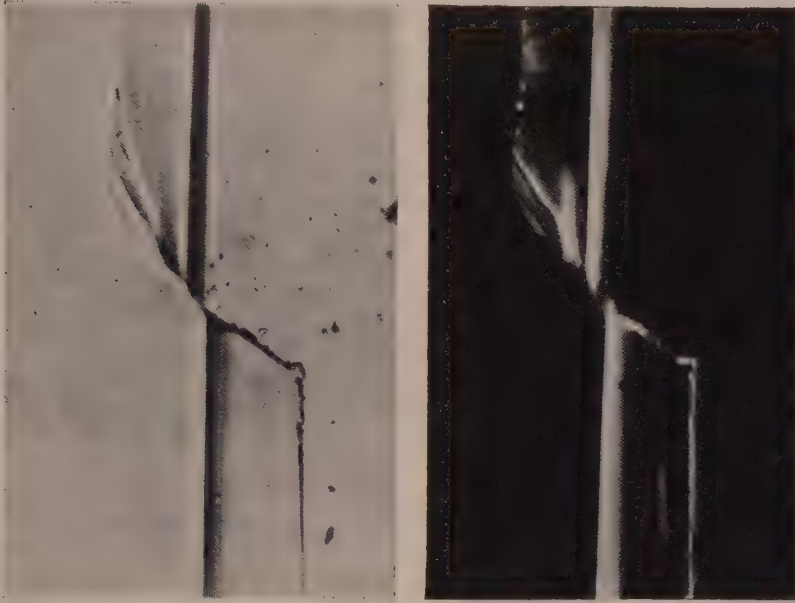


Abb. 14. Lanzettbruch einer Muschelbruchfläche in der Nachbarschaft einer Querversetzung. Fortpflanzungsrichtung beider Bruchvorgänge von unten nach oben. Links Auflicht-Hellfeld, rechts Auflicht-Dunkelfeld. Reichert-Z-Mikroskop, Abbildungsmaßstab 500 : 1 (F. Puchegger, 1952).

anspruchungsfeld hervorgebracht wird, während die Primärbruchfläche allein durch die Richtung der größeren Hauptspannung bestimmt bleibt. Das Auftreten geneigter Sekundärbruchflächen zwischen Niveauunterschieden der Primärbruchfläche ist somit eine notwendige Folge der betrachteten Bruchvorgänge in mehrachsig beanspruchten Stoffbereichen. Die mit der Wulstbildung verknüpfte gerade Kante des Sekundärbruchblattes wird offenbar durch die der Primärbruchfläche benachbarte Lage des Sekundärbruchbeginnes und die Richtung der primären Bruchfortpflanzung festgelegt, so daß der Sekundärbruch längs dieser Kante am raschesten fortschreitet und seitlich davon etwas zurückhängt (Abb. 14). Die Wulstbildung der Kante befindet sich bei den bisher geprüften Muschelbrüchen von den Lanzettspitzen ausgehend auf der konkaven Seite der Primärbruchfläche und ist demnach durch die konkreten Spannungsverhältnisse eindeutig festgelegt. Verschwindet diese Eindeutigkeit, wenn die zweite Hauptzugspannung längs gewisser Teile der Primärbruchfläche einen konstanten Wert annimmt? Für eine derartige Labilität der Wulstorientierung spricht, daß die Begegnung des Lanzettbruchvordringens mit weiteren Inhomogenitätsstellen noch nicht näher charakterisierbarer Beschaffenheit ein Umspringen der Wulstorientierung in ihre

Gegenrichtung veranlassen kann, wobei die Geradlinigkeit der Kante im allgemeinen beibehalten wird⁴². Indem die Wulstbildung etwa vom konkaven auf das konvexe Ufer der Primärbruchfläche übergeht, wird der wallartige Wulst auf der konkaven Fläche durch die korrespondierende grabenartige Hohlform fortgesetzt, so daß die Blattfläche jene seitliche Versetzung erfährt (Abb. 14), welche die vorhin gezeigten Bajonettformen (Abb. 11) ergibt. Die bestimmende Mitwirkung einer Inhomogenitätsstelle ist entweder direkt sichtbar oder kann, wie in Abb. 14, aus den von dieser Stelle ausgehenden radialen Anrissen indirekt erschlossen werden. Als Inhomogenitätsstelle kann auch die Durchquerung einer — stets spannungshaltigen — Schlierenfläche des Glases wirksam sein; Abb. 12 zeigt, daß die Versetzungsstellen einer Reihe von benachbarten Bajonettspürungen mit einer sichtbaren Schlierenspur zusammenfallen.

Die beschriebenen Sekundärbrucherscheinungen sind durch ihre besondere Verknüpfung mit der Richtung des primären Bruchfortschrittes und ihrem Labilitätscharakter als grundsätzlich dynamische Bildungen gekennzeichnet. Die zugrunde liegenden mehrachsigen Beanspruchungen bewirken durch sie eine Profilierung der Bruchflächen, welche jeder statisch-kontinuumsmechanischen Betrachtungsart notwendigerweise unverständlich bleibt und deshalb auch bisher unverständlich geblieben war⁴³.

(Eingegangen am 10. März 1953.)

Buchbesprechungen.

Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit. Von R. M. El Badrawy. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 19.) Mit 71 Textabb., 90 S. Zürich: Verlag Leemann. 1952.

Diese vom Verfasser als Promotionsarbeit ausgeführte Arbeit ist eine interessante, gründliche Untersuchung über Auftrieb, Widerstand und Wirkungsgrad beim ebenen Plattengitter in Überschallgeschwindigkeit. Die Bedeutung der Untersuchung für den Überschallpropeller liegt auf der Hand, und im letzten Kapitel seiner Studie bringt der Verfasser auch diesbezügliche Berechnungen. Ausgehend von den bekannten Tatsachen der Expansion und des Verdichtungsstoßes werden c_a , c_w und Gleitzahl für eine Platte ausgerechnet. Anschließend wird die linearisierte Theorie besprochen und ein Vergleich zwischen dieser und der genauen Methode gebracht. Das

⁴² Auch die beobachteten Richtungsänderungen dürften auf den Einfluß von Inhomogenitätsstellen zurückzuführen sein, die dem Kurs des Wulstvordringens nahekommen.

⁴³ Die vorliegende Untersuchung ist als Ergebnis einer langjährigen Entwicklung des Problems in allen wesentlichen Teilabschnitten durch Versuchsergebnisse des eigenen Mitarbeiterkreises fundiert und geprüft worden. Daher sind im vorstehenden nur diese und die wenigen von anderer Seite herrührenden Unterlagen nachgewiesen worden, welche jene Entwicklung beeinflussten oder zur Vervollständigung ihrer Ergebnisse herangezogen werden können. — Eine ähnlich umfassende Bearbeitung des Problems scheint von anderer Seite nicht erfolgt zu sein, doch sind einschlägige Teilfragen verschiedentlich durch andere Autoren untersucht oder kritisch beleuchtet worden. Als wichtigste, dem Verfasser nachträglich bekannt gewordene Veröffentlichungen dieser Art seien genannt: E. Orowan: Rep. Progr. Physics **12**, 185 (1949). — G. O. Jones: J. Soc. Glass Technol. **33**, 120 (1949). Mit spannungsthermisch zu nennenden Ansätzen für die Bruchbildung haben sich in letzter Zeit befaßt: S. M. Cox: J. Soc. Glass Technol. **32**, 127 (1948). — D. A. Stuart, O. L. Anderson und S. Horsley: Techn. Report XXXI, Inst. f. Study of Rate Processes, Salt Lake City, 1951. Die Unzulänglichkeit aller dieser Ansätze beruht vor allem auf ihrer Unkenntnis des mechanischen Verhaltens in kleinsten Stoffbereichen (Nr. 1) und des zeitlichen Verlaufes der Bruchfortpflanzung (Nr. 5).

Eine vollständige Wiedergabe aller auf Zugbruchflächen von Rundstäben vorhandenen Feinstrukturen war in der vorstehenden Arbeit nicht beabsichtigt (vgl. Nr. 2) und soll an anderer Stelle veröffentlicht werden. Die wertvolle Untersuchung von H. Schardin: Glastechn. Ber. **23**, 1, 67, 325 (1950), enthält einige dafür wichtige Gesichtspunkte, behandelt jedoch den gesamten Bruchvorgang, als ob er nur mit der athermischen Grenzgeschwindigkeit vor sich ginge, wodurch in wesentlichen Punkten Widersprüche mit den Tatsachen entstanden sind.

folgende Kapitel bringt in Verbindung mit Zahlenbeispielen eine Überlegung über die analytische Berechnung von Durchkreuzung, Einholen und Reflexion von Verdichtungsstößen und Expansionswellen. Nun wendet sich der Verfasser dem Gitterproblem zu und zeigt die Berechnung von Schub, Tangentialkraft und Wirkungsgrad. Auch hier wird linearisiert und mit der genauen Methode verglichen. Der Fehler ist nicht groß und man erspart sich die langen Berechnungen der Durchkreuzungen und Reflexionen. Das 5. Kapitel bringt die Schlierenaufnahmen. Auch die plötzliche Änderung des Anstellwinkels wird eingehend untersucht.

Die Arbeit liefert einen interessanten Beitrag zu den Problemen und Berechnungen im Überschallgebiet.

R. Bruniak, Wien.

Meßtechnik für Funkingenieure. Von *F. Benz*. Mit 399 Textabb. und 13 Zahlentafeln, XVI, 513 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. Geb. S 246.—, sfr. 51.30, \$ 11.80, DM 49.50.

Nach seinem erfolgreichen Buch „Einführung in die Funktechnik“ ist *F. Benz* mit einer „Meßtechnik für Funkingenieure“ vor die Öffentlichkeit getreten. Seine Arbeit ist für den in der Praxis stehenden Ingenieur, für den Studierenden, den Amateur und den geschickten Rundfunkbastler bestimmt, der seine Kenntnisse erweitern will. Es wendet sich also an einen sehr großen und verschiedentlich vorgebildeten Leserkreis; aus diesem Grunde werden Ableitungen grundsätzlich unterlassen und Formeln auf ein Minimum beschränkt. So gewinnt der Verfasser eine leicht lesbare Darstellung der gesamten Niederfrequenz- und Hochfrequenzmeßtechnik.

Das Buch ist in fünf Abschnitte gegliedert. Einer kurzen Einführung in die Meßtechnik folgt eine Schilderung der Stromquellen, Meß- und Hilfsgeräte, indem ein typischer Vertreter jeder Kategorie näher besprochen wird. Das dritte Kapitel beschreibt die meisten der gebräuchlichen Meßverfahren. Es referiert über die Meßmöglichkeiten von Strömen, Spannungen, Phasenwinkeln, Spulenverlusten, Eisenkapazitäten, über dielektrische Verluste, über Verluste der elektrischen Feldstärke, über magnetische Messungen, Messungen der Frequenz und des Klirrfaktors und über die wichtigsten akustischen Untersuchungen. Das vierte Kapitel ist der Anwendung dieser Methoden auf spezielle Messungen gewidmet. Die Prüfung von Einzelteilen eines Radioapparates, von Schwingkreisen, Röhren, Photozellen, Nieder- und Hochfrequenzverstärkern, Lautsprechern, Kopfhörern und Mikrofonen, ganzen Rundfunkanlagen, von Kabeln und Antennen und vieles andere mehr wird hier eingehend besprochen. Das letzte Kapitel behandelt die Mikrowellentechnik.

Da der Verfasser offenbar über große praktische Erfahrungen verfügt, hat er eine sehr geeignete Auswahl getroffen und in mühsamer Kleinarbeit zusammengetragen, was er für wichtig hielt, dem Praktiker und Studenten mitzuteilen. Das Buch enthält eine Fülle von Schaltungen mit sämtlichen Einzelheiten, so daß sie ohne weiteres nachgebaut werden können. Mit beachtlichem Geschick werden die wesentlichen Punkte erfaßt und eventuell auftretende Schwierigkeiten aufgezeigt. Das Buch stellt eine wertvolle Hilfe für Studenten und Diplomanden dar, die künftighin bei ihren Arbeiten gewiß in erster Linie das Buch von *Benz* befragen werden.

Trotz dieser entscheidenden Vorteile weist das Buch auch einige kleinere Mängel auf. Es ist kein eigentliches Lehrbuch, auch wohl nicht als solches geplant, aber ebensowenig ein Nachschlagewerk, da es an manchen Stellen vorzeitig abbricht. Die Abschnitte Niederfrequenz- und hochfrequente Spannungsquellen, die Erzeugung phasenverschobener Hochfrequenzspannungen, Röhrenvoltmeter, viele der Abschnitte über die verschiedenen Meßverfahren und manche mehr sind an Klarheit und Qualität der Darstellung kaum zu übertreffen; die Abschnitte über die akustischen Methoden fallen vergleichsweise ab. Der Gleichstromverstärker und manches mehr würde eine ausführlichere Behandlung verdienen. Der Verfasser ist allem Anschein nach stark pädagogisch eingestellt und nimmt daher vieles in das Buch auf, was dem Durchschnittsleser geläufig sein dürfte. Dadurch wird zwar der Überblick abgerundet, andererseits aber Raum in Anspruch genommen, der vielfach der Tiefe der Darstellung zugute gekommen wäre. Allerdings darf man nicht übersehen, daß ein so umfangreiches Gebiet, wie es in diesem Buch behandelt wird, kaum mehr von Einzelnen bewältigt werden kann und daß es sich um eine Erstauflage handelt, bei der der Verfasser noch völlig auf sich gestellt war.

E. Skudrzyk, Wien.

Seilschwebbahnen. Von *E. Czitary*. Mit 243 Textabb., VII, 390 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 248.—, sfr. 51.30, \$ 11.80, DM 49.80.

Der Verfasser hat in diesem Buch erstmalig eine zusammenfassende Darstellung des Seilschwebbahnbaues gegeben, welche bisher in der technischen Literatur vollständig gefehlt hat. Wohl waren verschiedene Probleme dieses Sondergebietes der Ingenieur Tätigkeit in zahlreichen Einzelaufsätzen, darunter eine ganze Reihe vom Verfasser des Buches selbst stammend, in verschiedenen Fachzeitschriften behandelt worden, aber eine systematisch aufgebaute, sich über das gesamte Fachgebiet erstreckende Darstellung gab es nicht. Auch das bekannte Buch

über Drahtseilbahnen von Stephan beschränkt sich ja in der Hauptsache auf die Beschreibung ausgeführter Anlagen.

Es ist daher sehr zu begrüßen, daß sich der Verfasser dieser Aufgabe unterzogen und sie ganz ausgezeichnet gelöst hat.

Aus dem Inhalt des Werkes sei ganz besonders auf die einen großen Teil des Buches umfassenden theoretischen Grundlagen der Tragseilberechnung verwiesen, die ja bei jeder Seil-schwebebahn das Kernproblem bilden. Aber auch die konstruktive Seite wird recht ausführlich gebracht. Im letzten Teil des Buches findet vor allem der mit der Bauausführung betraute Ingenieur sehr wertvolle Hinweise. Das außerordentlich umfangreiche Literaturverzeichnis, das dem Buche beigelegt ist, gibt Zeugnis von der Gründlichkeit, mit welcher der Verfasser an seine Aufgabe herangetreten ist.

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß dieses Buch eine sehr wertvolle Bereicherung der technischen Literatur darstellt, die sowohl den im Seilbahnbau tätigen Ingenieuren als auch den Studierenden von größtem Nutzen sein wird.

K. Peter, Wien.

Rechenmethoden der Quantentheorie. Dargestellt in Aufgaben und Lösungen. Erster Teil: Elementare Quantenmechanik. Von S. Flügge, unter Mitarbeit von H. Marshall. Zweite, völlig neubearbeitete und vermehrte Auflage. („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.“ Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LIII.) Mit 30 Textabb., VIII, 272 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1952. DM 29,80, geb. DM 32,80.

„Wissen“ und „Können“ bilden auch in der Physik und insbesondere in der Quantentheorie nicht immer zwei einander einschließende Begriffe. Während das Wissen rezeptiv aufgenommen werden kann, ist das Können, d. h. die Fertigkeit in der Beherrschung konkreter Einzelprobleme bis zum numerischen Resultat, nur durch tätiges Üben im Lösen von Aufgaben zu erwerben. Die dazu notwendige Darstellung der Rechenmethoden der Quantentheorie in Aufgaben und Lösungen ist 1947 von S. Flügge unter Mitarbeit von H. Marshall bereitgestellt worden. Daß dieses Buch zu den notwendigen Büchern gehört, zeigt die Tatsache, daß es nunmehr in 2. Auflage erscheint. Gegenüber der 1. Auflage ist es völlig umgearbeitet worden. Von den ursprünglich 79 Aufgaben der ersten Auflage wurden die letzten 17 ganz entfernt, die übrigen unter stärkerer Hervorhebung der physikalischen Fragestellung stark überarbeitet und außerdem 43 völlig neue Aufgaben hinzugefügt. Bei den Näherungsverfahren bringt das Buch einiges Neues und auch das Schwingersche Variationsverfahren zur Phasenbestimmung ist aufgenommen worden. Die Probleme dagegen, welche mit der Dirac-Gleichung behandelt werden, wurden einem geplanten II. Band vorbehalten. Eine Einleitung von 18 Seiten faßt in konzentrierter Form die wesentlichsten Begriffsbildungen der Quantentheorie, die bei den Aufgaben verwendet werden, kurz zusammen.

Das Buch, das aus der Praxis des Seminar- und Übungsbetriebes erwachsen ist, wird sich wieder mit bestem Erfolg in der Praxis der Hochschulübungen bewähren. Darüber hinaus aber wird es auch jedem einzelnen, der es durcharbeitet, an Hand der behandelten konkreten Einzelprobleme am unmittelbarsten mit den Methoden und Begriffsbildungen der Quantentheorie vertraut machen.

W. Glaser, Wien.

Elements of Wave Mechanics. Von N. F. Mott. Mit 30 Textabb., IX, 156 S. Cambridge: At the University Press. 1952. Geb. 21s. net.

Der Verfasser beabsichtigt, mit diesem Buch dem Studierenden der Physik eine Einführung in die Probleme der Wellenmechanik in die Hand zu geben. Zufolge dieser Bestimmung bemüht er sich auch, die Probleme in didaktisch klarer Weise zu behandeln. So werden, ausgehend von den Lösungsmethoden der Wellengleichung, die in der Wellenmechanik auftretenden Probleme, wie z. B. das Mehrkörperproblem, die relativistische Wellenmechanik usw., in sehr verständlicher Weise behandelt.

Das Buch bietet in gedrängter Form eine gute Einführung in die Wellenmechanik und ermöglicht dem Studierenden an Hand von angeführten Übungsaufgaben eine Vertiefung in dieses Gebiet der modernen Physik.

F. Kracmar, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Treibstoffe für Verbrennungsmotoren. Von Dr. Ing. Franz Spausta, Wien. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. In zwei Bänden.

Band 1: **Flüssige Treibstoffe und ihre Herstellung.** Mit 153 Textabbildungen und 83 Tabellen. X, 366 Seiten. Lex.-8°. 1953. Ganzleinen S 228.—, DM 45.60, \$ 10.85, sfr. 46.50

Band 2: **Eigenschaften und Untersuchung der flüssigen Treibstoffe mit besonderer Berücksichtigung der Klopffestigkeit. Die gasförmigen Treibstoffe.** Mit etwa 120 Textabbildungen. Etwa 350 Seiten. Lex.-8°. 1953. *Unter der Presse*

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches im Jahre 1939 haben die Treibstoffe in ihrer Technologie und allen anderen Zweigen eine starke Aufwärtsentwicklung erfahren. Dies war der Grund, warum die zweite Auflage von Grund auf neu bearbeitet und erheblich erweitert wurde; die Folge davon war die Teilung in zwei Bände. Wie bei der ersten Auflage hat der Verfasser eine Darstellung gewählt, die auch für den gebildeten Nichtfachmann verständlich ist; die beiden Bände sind daher für einen größeren Leserkreis bestimmt. Das Buch besitzt auch für den Mineralölkaufmann Interesse. Hingewiesen sei auf die besonders eingehende Behandlung der Herstellung der Treibstoffe durch Hydrierung und Synthese.

Verschleiß, Betriebszahlen und Wirtschaftlichkeit von Verbrennungskraftmaschinen. Von Dr.-Ing. Carl Englisch, Göteborg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 393 Textabbildungen. X, 288 Seiten. 4°. 1952. (Band 14: „Die Verbrennungskraftmaschine“, herausgegeben von H. List, Graz.) Steif geheftet S 260.—, DM 52.—, \$ 12.40, sfr. 53.30

Verschleiß bedeutet Verlust, nicht nur an den Werkstoffen, sondern auch an aufgewandter Arbeitskraft und Arbeitszeit. Die im ersten Abschnitte des Buches behandelten Verschleißerscheinungen werden daher auch in der vorliegenden zweiten Auflage, die die Entwicklung der letzten Jahre berücksichtigt, mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. Die Kapitel über Filter und Schmieröle sind erweitert, jenes über Lagerwerkstoffe ergänzt. Der zweite Abschnitt unterrichtet über den Betriebsmittelverbrauch der heute üblichen Motorenbauarten und ermöglicht damit Vergleiche der Verbrauchsziffern verschiedener Motoren. Im dritten Abschnitt wird kurz aufgezeigt, wie sich die Wirtschaftlichkeit der Verbrennungskraftmaschine auch bei Berücksichtigung unstabiler wirtschaftlicher Verhältnisse erfassen läßt.

Pulvermetallurgie. Vorträge gehalten auf dem 1. Plansee Seminar „De Re Metallica“ 22. bis 26. Juni 1952, Reutte/Tirol. Herausgegeben von F. Benesovsky, Leiter der Versuchsanstalt, Metallwerk Plansee Ges. m. b. H., Reutte/Tirol. Mit 1 Porträt, 224 Abbildungen im Text und 4 farbigen Abbildungen auf 2 Tafeln. VII, 316 Seiten. 1953.

Ganzleinen S 169.—, DM 32.—, \$ 7.60, sfr. 32.80

Inhaltsverzeichnis: Die Stabilität anorganischer Verbindungen im Hochvakuum. Von M. Auwärter. — Influence des gaz adsorbés sur la stabilité des liaisons du corps solide, au voisinage de la surface. Par H. Forestier, J. Maurer, J. P. Kiehl et P. Stahl. — Mikro-Thermoanalyse, Schmelzen und Kristallisieren von Mischkristallen. Von A. Kofler. — Ein einheitliches Härteprüfverfahren (Eindringhärte) mit Hartmetall-Prüfkörpern. Von R. Mische. — Die chemische Bindung in Monokarbid und ihre Beziehung zur Härte. Von H. Nowotny und F. Vitovec. — Einige neue Anschauungen über die Festigkeit von Legierungen. Von G. M. Schwab. — Diffusion in festen Metallen. Von W. Seith. — Die heutigen Anschauungen über die Natur der Metalle und ihre Bedeutung für die Metallkeramik (Pulvermetallurgie). Von F. Skawpy. — Idealkristall und Realkristalle. Von A. Smekal. — Grundsätzliches zum trockenen Verschleiß fester Körper. Von R. Walzel. — Some Observations on the Mechanism of Liquid Phase Sintering. By H. S. Cannon and F. V. Lenel. — The Development of High Strength, Heat Treatable Products from Alloy Powders. By G. J. Comstock and F. H. Clark. — Bestimmung der Haftkraft von Metallpulvern. Von E. Cremer. — The Effect of Lattice Changes on the Sintering Process. By H. H. Hausner. — Über die Abscheidung von chemisch reinem Vanadium aus der Gasphase. Von G. Jantsch und F. Zemek. — The Production of Metal Powders by Fusion Electrolysis. By W. J. Kroll. — Powder Metallurgy as viewed by a Manufacturer of Metal Powder Products. By A. J. Langhammer. — Die Mikrohärtigkeit als Hilfsmittel bei der Untersuchung von Sintervorgängen in komplexen Systemen. Von E. M. Onitsch-Modl. — Beitrag zur physikalischen Analyse des Sintervorganges. Von G. Ritzau. — Über Oberflächenschichten, insbesondere Oxydschichten und ihren Einfluß auf das Sintern. Von F. Sauerwald. — Die Anwendung der Emaniermethode in der Pulvermetallurgie. Von H. Schreiner. — Neuere Entwicklung der Pulvermetallurgie von Aluminium. Von A. von Zeerleder. — Ein Ordnungssystem der Hartmetalle. Von C. Ballhausen. — The Solid Solubilities of some Stable Carbides in Cobalt, Nickel and Iron at 1250° C. By R. Edwards and T. Raine. — Höchsttemperaturbeständige Werkstoffe durch Silizieren von Wolfram und Molybdän. Von E. Fitzer. — Reindarstellung von Titancarbid. Von G. F. Hüttig. — Mischkristallbildung bei hochschmelzenden, metallischen Hartstoffen. Von R. Kieffer. — Investigations on Ternary Systems Me_1 - Me_2 -B, and a Discussion of the Relative Strength of the Bond Transition Metal-Boron. By R. Kiessling. — Das System Wolfram-Kobalt-Kohlenstoff. Von P. Rautala und T. Norton.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Konstruktionsbücher

Herausgeber

Professor Dr.-Ing. **Karl Kollmann**, Karlsruhe i. Ba.

Eine neue Schriftenreihe für den Konstrukteur. Jeder Band der Sammlung behandelt in knapper Form ein Teilgebiet der Konstruktionslehre

Erster Band: **Stahlleichtbau von Maschinen.** Von *K. Bobeck, A. Heiss* und *F. Schmidt*.
Zweite Auflage. (In Vorbereitung) DM 12.60

Zweiter Band: **Kräfte in den Triebwerken schnelllaufender Kolbenkraftmaschinen, ihr Gleichgang und Massenausgleich.** Von Dr.-Ing. *Gerhart H. Neugebauer*, Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg AG., Werk Nürnberg. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 104 Abbildungen. V, 127 Seiten. 1952. DM 12.60

Dritter Band: **Berechnung und Gestaltung von Metalifedern.** Von Dipl.-Ing. *Siegfried Groß*, Sevenoaks, Kent, England. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 79 Abbildungen. IV, 95 Seiten. 1951. DM 7.50

Vierter Band: **Gestaltung von Wälzlagerungen.** Von Dipl.-Ing. *Wilhelm Jürgensmeyer*, Schweinfurt. Zweite Auflage, bearbeitet von Dipl.-Ing. *H. v. Bezold*. Mit 162 Abbildungen. VIII, 106 Seiten. 1953. Steif geheftet DM 10.50

Fünfter Band: **Berechnung und Gestaltung von Schraubenverbindungen.** Von Dr.-Ing. habil. *H. Wiegand*, Düsseldorf, und Ing. *B. Haas*, Berlin. Zweite Auflage. Mit 71 Abbildungen. V, 68 Seiten. 1951. DM 6.60

Siebenter Band: **Gummifedern.** Von Dr.-Ing. *E. F. Göbel*, Stuttgart. Mit 68 Abbildungen. IV, 58 Seiten. 1945. DM 6,—

Achter und neunter Band: **Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen.** Von Dr.-Ing. *Kurt Haug*, Lindau/Bodensee. Mit 134 Abbildungen. V, 201 Seiten. 1952. DM 24,—

Zehnter Band: **Gestaltung und Berechnung von Wellen.** Von Dr.-Ing. *F. Schmidt*, Augsburg. Mit 87 Abbildungen. IV, 70 Seiten. 1951. DM 9.60

Elfter Band: **Gestaltung gezogener Blechteile.** Von Dr.-Ing. habil. *G. W. Öhler*, Privatdozent an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 145 Abbildungen. IV, 120 Seiten. 1951. DM 8.40

Zwölfter Band: **Schweißkonstruktionen. Berechnung und Gestaltung.** Von Dipl.-Ing. *Richard Hänchen*. Mit 349 Abbildungen. IV, 80 Seiten. 1953. Etwa DM 9,—

In Vorbereitung befinden sich:

Fertigungs- und stoffgerechtes Gestalten in der Feinwerktechnik. Von Obering. *H. Pöschl*, Karlsruhe. — **Gestaltung von Fahrzeuggetrieben.** Von Dr.-Ing. *H. Reichenbacher*, Hamburg. — **Gestaltungsgrundlagen der Feinwerktechnik.** Von Dr. *K. H. Sieker*, Direktor der Gauß-Schule, Berlin.

Zu beziehen durch

MINERVA, WISSENSCHAFTLICHE BUCHHANDLUNG GES. M. B. H., WIEN I

Verkaufsort: Schottenbastei 2 / Tel. U 27 0 47

Expedition: Mülkerbastei 5 / Tel. U 26 5 60